TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA

DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 140 - Julho - 1943

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMERCIO, 56, 3.º
LISBOA

União Eléctrica Portuguesa

S. A. R. L.

SEDE
Rua Duque de Loulé, 240 — Pôrto
Telef. 2828 — 2829 — 2830 — Est. 90

DELEGAÇÃO
R. António Maria Cardoso, 13, 2.º Lisboa
Telefones 27232 — 27233 — Est. 365

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO E DA CACHOFARRA

A **União Eléctrica Portuguesa** distribui e vende electricidade nos **distritos** de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU LEIRIA e de SETÚBAL, pela mais extensa rêde de alta tensão em Portugal (mais de 1.200 kms), levando fôrça motriz às FÁBRICAS e luz a CIDADES, VILAS, ALDEIAS e LOGARES

A **U. E. P.** facilita a electrificação de Fábricas e oferece as maiores vantagens nas suas tarifas

Consultar a **U. E. P.** e consumir a sua energia é **proveitoso negócio**

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de tôdas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados.

Pedidos à Companhia **"CIMENTO TEJO"**

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.º

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.º
PORTO

NÚMERO
140
Julho — 1943

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N. / TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
LUIZ DE ALMEIDA ALVES
ADMINISTRADOR
JOSÉ DE LUCENA
BIBLIOTECÁRIO
FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES
CORPO REDACTORIAL
Fernando Moitinho de Almeida
Henrique Dias Barracas
José Carlos Pinheiro da Silva
Manuel dos Santos Rézio

NÚMERO AVULSO 5$00
ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	13$50	26$00	50$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	35$00	60$00
Estrangeiro...	—	40$00	70$00

EDITOR E PROPRIETARIO
ASS. DOS ALUNOS DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

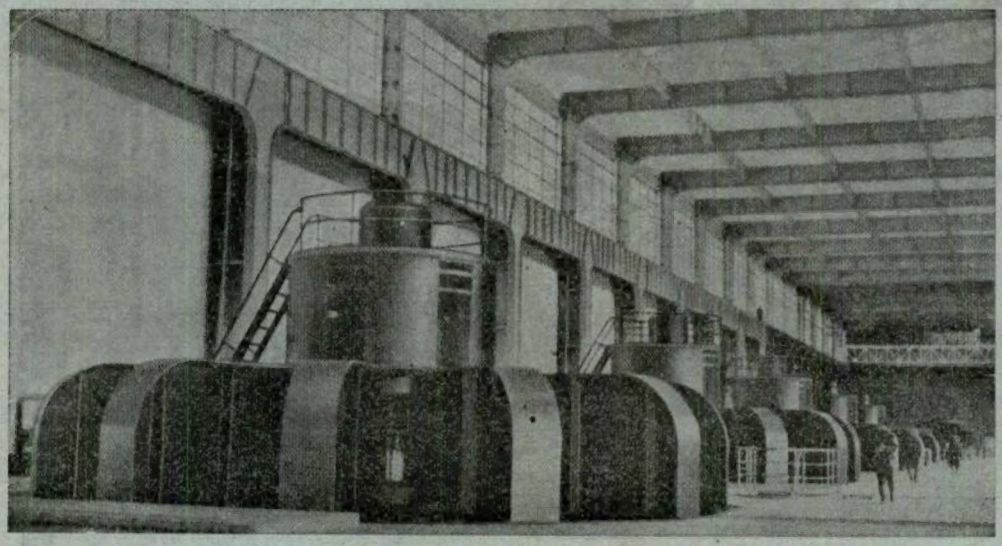
CAPA — Ponte sôbre o Braço Sul do Rio Mondego na E. N. n.º 50-2.ª (Junto à Figueira da Foz)

		Págs.
Notas sôbre a determinação do manganês nos seus minérios	Eng.º Herculano de Carvalho	423
Estudo das estruturas hiperestáticas pelos teoremas de Castigliano e pelo método de Beggs	Eng.º Civil Manuel Rocha . .	429
Los puentes modernas en España	Eng.º Don César Villalba Granda	451
La sustitución de los tramos metálicos por puentes de hormigón en los ferrocarriles	Eng.º Don César Villalba Granda	468
Vida Escolar e Associativa . . .	. . . . .	480
Fiscalização de obras públicas	Eng.º Civil Horácio de Moura	481
Do Mundo Técnico	. . . . .	494
Publicações recebidas	. . . . .	498

STABILO
STABILO
STABILO
STABILO
STABILO
SCHWAN
Bleistift-Fabrik A-G.
NÜRNBERG
Lápis de desenho
em 18 graduações 7 B — 9 H
Lápis de côr
O utensílio precioso em 24 côres
Novidade: STABILO Cellomin D. R. P.
O lápis-tinta com a mina especial
resistente às influências climáticas
Representante:
A. Ferreira da Silva, Pôrto.
Rua Alexandre Braga, 82. Tel. 6132

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Central hidroeléctrica com 5 geradores General Electric de 77.500 kVA 88 r. p. m. cada um

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão. Centrais termo e hidroeléctricas. Instalações para melhorar o factor potência. Tracção eléctrica. Máquinas, Transformadores e Electrodos para soldadura eléctrica. Fornos eléctricos. Automotoras eléctricas e Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Condutores eléctricos. Electrificação de fábricas. Comandos eléctricos especiais para fábricas téxteis, fábricas de papel, etc. Máquinas frigoríficas. Emissores e receptores para T. S. F. Aparelhagem de Electro-Medicina. Instalações de Som.

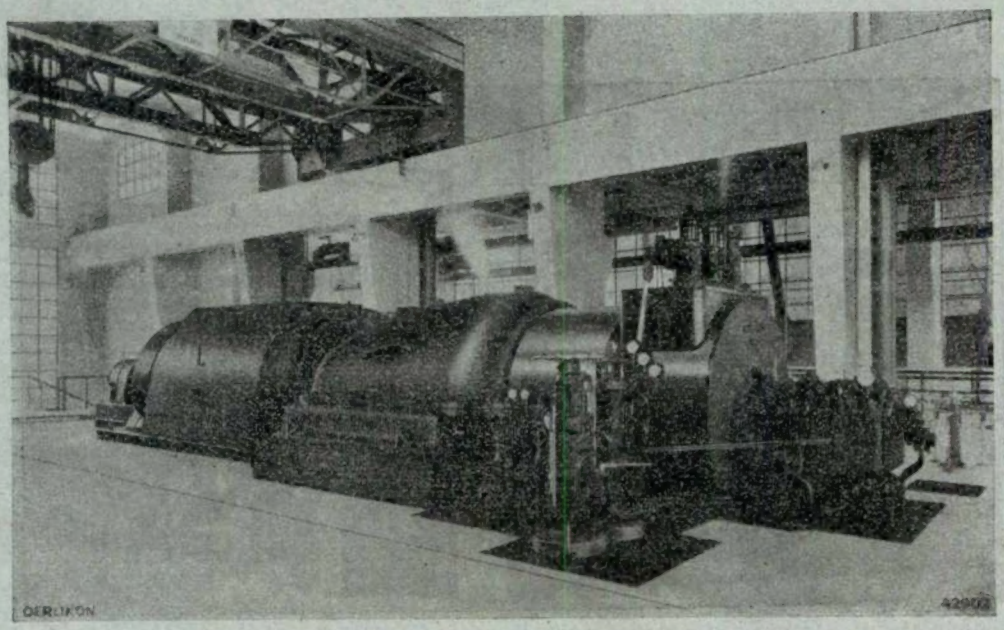
THOMSON
GENERAL ELECTRIC

Portuguesa, L.da

LISBOA
Rua do Norte, 5

Telef. 28135-28136

OERLIKON



Grupo turbo-alternador Oerlikon de 30000 kW e ponte rolante de 74 t.
da Central de Hameenlinna (Filândia)

PRODUTOS OERLIKON

Equipamentos eléctricos para centrais termo e hidro-eléctricas, subestações e instalações de distribuïção. Geradores e motores eléctricos de todos os tipos, transformadores, reguladores de indução, grupos convertidores, mutadores, turbinas a vapor e turbo geradores, gruas eléctricas, interruptores e aparelhos de manobra para alta e baixa tensão, aparelhos de protecção e relais de todos os tipos, equipamentos para soldadura eléctrica por arco, compressores e bombas de vácuo, electrolisadores, equipamentos eléctricos para locomotivas, automotoras eléctricas e diesel-eléctricas (via estreita e normal), tramwais, troley-buses, funiculares, teleféricos, etc.

Representante Geral para Portugal e Colónias

P. BELLASI

Pôrto // Rua Sá da Bandeira, 494, 3.º // Telefone 968

ATELIERS DE CONSTRUCTION OERLIKON
ZURICH-OERLIKON (SUIÇA)

Previnem-se os nossos assinantes e anunciantes que a Revista suspende, como de costume, a sua publicação durante os meses de férias.

9475

TÉCNICA

LUIZ DE ALMEIDA ALVES

DIRECTOR

ANO XVIII - N.º 140 JULHO 1943

NOTAS SÔBRE A DETERMINAÇÃO DO MANGANÊS NOS SEUS MINÉRIOS

PELO ENG.º HERCULANO DE CARVALHO

(Prof. do I. S. T.)

Estas notas referem-se apenas à análise de *minérios portugueses vulgares,* contendo a maior parte do elemento no estado de $Mn\ O_2$.

Desejou fazer-se a comparação entre os resultados que se obtêm pelo método volumétrico do ácido oxálico (denominado «usual» por Low [1]) e o método ponderal pelo fosfato, que se considerou como padrão. Paralelamente fêz-se quási sempre a determinação do manganês no estado de S Mn.

Não se estudou o método volumétrico de Volhard, a-pesar-de correntemente ser usado nos laboratórios, porque o de Low se pode considerar um aperfeiçoamento dêle.

— Há anos já que no Laboratório de Química Analítica do I. S. T. se pratica e se ensina a determinação volumétrica de Mn pelo ácido oxálico, depois de se ter chegado à conclusão da sua precisão e reprodutibilidade em ensaios comparativos análogos aos que vamos citar.

Mas algumas discrepâncias ùltimamente notadas entre os nossos resultados e os de outros laboratórios levaram-nos a examinar novamente o assunto.

A técnica descrita por Low, quando executada com pouco cuidado, pode conduzir a resultados altos, mas as probabilidades de encontrar valores baixos são, pelo contrário, pequenas.

Como se indicava que os nossos números eram geralmente inferiores, não se via, «à priori», para o facto justificação.

Os resultados dos novos ensaios confirmam não haver razão para duvidar do método.

As diferenças reais que por vezes se notam têm a sua razão de ser na existência de quantidades, por vezes apreciáveis, de níquel e zinco (mais raro). Mas estas diferenças atenuam-se quando, no método do fosfato, se faz a eliminação prévia daqueles elementos. Quanto ao cobalto (que existe sempre

(1) Low — Technical Methods of Ore Analysis, pág. 142 da 10.ª edição.

em pequena quantidade, nos minérios portugueses) êle interfere igualmente no método de Low, sucedendo o mesmo com o chumbo, se não houver a precaução de o eliminar pelo anião $Cr_2O_7^{=}$, no decorrer da análise.

Descrição do método de Low [1] — Pesam-se 0,5 g de minério finamente pulverizado e atacam-se, em pequeno copo coberto, com 10 ml de ác. clorídrico concentrado. Aquece-se na chapa do banho-maria até ataque completo. Deixa-se arrefecer, junta-se 8 – 10 ml de ácido sulfúrico 1 : 1 e leva-se a banho de areia até quási à secura. Deixa-se arrefecer, trata-se por 100 ml de água e aquece-se um pouco para dissolver os sais.

Se o resíduo fôr branco ou muito levemente corado (SiO_2, SO_4Ba, TiO_2) continua-se como se segue; caso contrário, filtra-se, lava-se bem, calcina-se o resíduo, aquece-se com FH + gotas de SO_4H_2, calcina-se, fundindo o resíduo, se o houver, com um pouco de CO_3Na_2, retoma-se por água, adiciona-se leve excesso de ácido sulfúrico diluído e junta-se ao filtrado anterior.

— Aquece-se então à fervura, retira-se da chama e junta-se 1–2 g de OZn puro em suspensão na água, agitando, aquece-se novamente e adiciona-se mais OZn até precipitação completa do ferro o que se reconhece pela aglomeração perfeita do precipitado e ainda pela deposição de óxido de zinco *branco* no fundo do copo, quando o reagente é adicionado. Ferve-se [2] e filtra-se então para copo de 600 ml, lavando 10 vezes com água quente.

(No filtro fica todo o ferro que, depois de dissolvido em ác. clorídrico se pode dosear volumètricamente).

Ao filtrado adiciona-se então 3-4 g de acetato de sódio e 30-40 ml de solução saturada de bromo. Aquecer à fervura e deixar a banho-maria cêrca de 2 horas. (É necessário assegurarmo-nos de que a água de bromo foi em quantidade suficiente, o que se reconhece pela côr amarela ou avermelhada de líquido sobrenadante quando o precipitado assenta e, a princípio, por persistirem vapores de bromo acima da solução).

— Filtra-se então o líquido ainda quente, com o auxílio de leve sucção, através de cadinho-filtro Schott G 3, lavando 10 vezes com água quente e não nos importando com a película de óxido aderente ao copo e à vareta, que será apenas lavada e não arrastada para o filtro.

— O cadinho-filtro é então *bem limpo exteriormente* e transferido com o precipitado para dentro do copo que serviu à precipitação.

— Adiciona-se pequeno excesso de solução de $C_2O_4H_2.2OH_2.N/_5$ [1] e 50 ml de ácido sulfúrico 1 : 9. Tapa-se o copo com vidro de relógio e aquece-se próximo da fervura, agitando freqüentemente, prolongando o aquecimento até já não haver partículas escuras em suspensão ou aderentes ao copo ou filtro.

Diluir então até cêrca de 200 ml com água quente e aquecer ou arrefecer até à temperatura de 60–70°. Titular com $MnO_4K.N/_{10}$ até côr rósea leve. Se fôr n o número de mililitros da sol. $N/_5$ de ácido oxálico que empregámos e n′ o volume da solução $N/_{10}$ de permanganato, teremos

$$Mn\,\%=0{,}2\times\left(n-\frac{n'}{2}\right)\times 5{,}493=$$

$$=1{,}0986\left(n-\frac{n'}{2}\right)$$

Observações — a) A experiência tem-nos mostrado que o ataque ácido descrito é suficiente para a dissolução total de Mn nos minérios portugueses. Apenas certos

(1) A técnica descrita por Low foi levemente modificada por nós.

(2) Desconfiando-se da presença do chumbo, deve juntar-se, antes de levar à fervura, 2 ml de solução saturada de $Cr_2O_7K_2$.

(1) Também pode usar-se solução do ác. oxálico de título tal que 1 ml corresponda a 1 % de Mn, tendo em atenção que se partiu de 0,5 g.

minérios com elevada percentagem de Fe[1] deixam apreciável resíduo mas êste é constituído essencialmente por óxidos de ferro.

O ataque presta-se para a dosagem da sílica, quando esta é pedida, visto a insolubilização em meio sulfúrico ser muito boa e até usualmente empregada, por exemplo, para o doseamento do silício nos produtos siderúrgicos. A sílica assim obtida é ordinàriamente branca e não deixa resíduo còrado pelo tratamento com FH.

Num caso, suspeito, em que fizemos a fusão dêste resíduo, recuperámos menos de 0,01 % de Mn.

b) Também no decorrer do método se pode dosear o ferro, como se disse, no precipitado formado pelo OZn. Quere dizer que o método se presta a realizar com a maior economia de tempo as três determinações correntes nos minérios de manganês: Mn, SiO_2, Fe.

Para os doseamentos de Al e P, que algumas vezes se exigem, haverá então de fazer determinações àparte.

c) A separação pelo óxido de zinco é muito boa.

No final, isto é, com Fe^{+++} e Al^{+++} já precipitados, encontra-se, segundo o que verificámos, um valor de pH vizinho de 6,3 (líquido já frio). A adição de $C_2H_3O_2Na$ leva êste valor a 6,5-6,6 mas, segundo faz notar Low, o papel do acetato é o de neutralizar algum BrH:

$$C_2H_3O_2^- + Br^- + H^+ \rightarrow C_2H_4O_2 + Br^-,$$

não havendo, nestas condições, formação de Br_2Mn.

d) É importante conservar excesso de $C_2O_4H_2$ durante a dissolução de MnO_2. Verificando-se que pela agitação se começa a formar leve tonalidade roxa, deve adicionar-se logo mais 1-2 ml da sol. de ác. oxálico.

Fazendo-se o ensaio em duplicado, como é de rigor, uma das tomas servirá como orientadora da segunda, à qual se juntará, de uma vez, o volume de solução de ác. oxálico encontrado para a primeira, mais 2-3 ml. Com a prática, a apreciação do volume de precipitado de $MnO_2.nOH_2$ dá-nos logo a ordem de grandeza do volume de solução redutora a adicionar.

e) Como é óbvio, na lavagem do precipitado no cadinho-filtro, antes de proceder à sua dissolução e redução, deve conseguir-se a eliminação total do bromo em excesso. A prática mostra que as 10 lavagens indicadas são suficientes para isso.

f) As reacções-base do processo de titulação, são as seguintes:

$$1)\quad C_2O_4^= + MnO_2 + 4H^+ \rightarrow Mn^{++} + 2CO_2 + 2OH_2$$

$$2)\quad 5C_2O_4^= + 2MnO_4 + 16H^+ \rightarrow 2Mn^{++} + 10CO_2 + 8OH_2$$

Portanto: 1 ml $C_2O_4H_2.2OH_2$ $^M/_{10}$ = = 1 ml $N/_5$ = 5,493 mg de Mn.

As mesmas reacções podem servir de base ao doseamento só de MnO_2 do minério, trabalhando directamente sôbre uma toma bem pulverizada e em presença de concentração mais elevada de SO_4H_2.

g) Como já se fêz notar, se existir cobalto, êste elemento comporta-se no processo como o manganês. Pelo contrário o hidróxido de Ni^{+++} não precipita nas condições referidas.

Método de precipitação no estado de PO_4NH_4Mn e pesagem de $P_2O_7Mn_2$ — Êste método que pode considerar-se como «padrão», vem descrito com suficiente pormenor em qualquer bom tratado de análise química.

Para as separações prévias seguimos duas técnicas que, dado os teores quási sempre baixos de Zn, Ni e Co dos nossos minérios de manganês e a ausência de Pb, nos deram resultados pràticamente equivalentes. Resumimo-las a seguir.

[1] Tais amostras vieram para o Laboratório com a designação de «minérios mixtos».

A) — Depois do ataque do minério, insolubiliza-se SiO_2, filtra-se e leva-se a solução ao SH_2 para precipitar os grupos II e III.

— No filtrado faz-se a separação entre os catiões divalentes e trivalentes dos grupos V e VI [1], pelo acetato.

— O líquido filtrado, contendo Mn, Ni, Co, Zn e os catiões dos grupos VII e VIII, é levado a SH_2, depois de acertar convenientemente o pH para que só precipitem os sulfuretos de Zn, Ni, e Co.

O filtrado trata-se agora por $OHNH_4 + S(NH_4)_2$, separando assim Mn dos metais dos grupos VII e VIII.

O precipitado de SMn dissolve-se em SO_4H_2, ferve-se para expulsar SH_2, e procede-se a precipitação com PO_4HNa_2.

B) — Sôbre a solução resultante do ataque e sem filtrar mesmo SiO_2, procede-se à separação pelo acetato.

— No líquido filtrado precipitam-se Mn, Ni, Co e Zn pelo $S(NH_4)_2 + OHAm$. Filtra-se e lava-se.

— Dissolvem-se então os sulfuretos em *ac. sulfúrico 1 : 9*; desta forma permanecem insolúveis na quási totalidade os sulfuretos de Ni e Co.

— No líquido filtrado faz-se agora a precipitação pelo $PO_4H^{=}$.

— Como a dosagem de pequenas quantidades de manganês se faz ràpidamente e com precisão pelo método colorimétrico escolhendo como oxidante o periodato, fizemos a recuperação de todo o Mn, em qualquer das técnicas, nos vários resíduos das separações (sôbre tudo na do acetato) e no líquido filtrado do PO_4NH_4Mn.

Encontrámos neste último um teor correspondente a 0,02 % de Mn o que vem confirmar a excelência do método. Nos resíduos encontrámos, ao todo, quantidade que não excedia 0,1 %.

À mesma ordem de grandeza corresponde o teor de Mn encontrado no precipitado de hidróxidos do método volumétrico de Low obtido com a adição de OZn.

Precipitação e dosagem no estado de SMn — O método não é muito de aconselhar mas praticámo-lo algumas vezes pois ainda é usado em alguns laboratórios e, quando conduzido com os devidos cuidados, dá resultados aceitáveis. Também o não descrevemos em pormenor, por ser conhecido.

A principal dificuldade reside na transformação *integral* do SMn mais ou menos oxidado em SMn puro. Muitas vezes tem de repetir-se a calcinação (com S e em atmosfera de H_2) para eliminar completamente os pontos acastanhados que ainda se notam.

Em resumo, a técnica é a mesma que se descreveu em B) no método do fosfato até se obter o precipitado de SMn.

Êste dissolve-se então em ClH 1 : 1 [1] e reprecipita-se por $OHNH_4 + S(NH_4)_2$. Filtra-se, lava-se 3 vezes e procede-se à calcinação em cadinho de Rose.

Comparação dos resultados — No quadro a seguir indicam-se os resultados da análise de 12 amostras diferentes e de várias proveniências. Na 1.ª coluna designam-se, por números, as amostras, *L* indica os resultados obtidos pelo método de Low, *P* e *S* os valores dados pelos métodos do fosfato e do sulfureto, respectivamente. Na coluna a seguir dão-se alguns números achados em outros laboratórios sôbre duas das amostras. Finalmente nas outras colunas indicam-se as diferenças entre os valores obtidos com *L* e *P* e fazem-se algumas observações.

Vê-se que em 8 das amostras analisadas os afastamentos em relação ao método padrão são muito pequenos. Nas amostras 2 e 3 há êrro apreciável por excesso, ao passo que em 11 e 12 o desvio, da

(1) As designações dos grupos correspondem ao método geral de separações dos catiões de Carnot, modificado por Lepierre.

(1) Utilizámos propositadamente concentração elevada de ácido para que a interferência de Zn, Co e Ni nos desse idéia do êrro cometido.

mesma ordem de grandeza (0,6 °/₀), é por defeito.

É possível que tenha havido em parte influência da amostragem ou (no caso de 11 e 12) interferência do Ni e Zn no método do fosfato, visto a separação não ser muito eficiente, como já se disse.

No entretanto aqueles afastamentos não excedem o que é vulgar encontrar-se entre resultados de laboratórios diferentes.

Vê-se também que a interferência de Zn, Ni e Co, no método do sulfureto, conduzido segundo a técnica indicada, é nítida, como era de prever [2].

Valores em Mn °/₀ (nos minérios secos a 100° [1]

N.º	L	P	S	Outros laboratórios	Δ	Observações
1	50,33	50,52	50,51	49,32 50,08	— 0,19	
2	47,80	47,15	48,77	48,16 48,25 47,88	+ 0,65	— O valor 47,88, foi achado em Laboratório estrangeiro.
3	30,87	30,36	30,45	—	+ 0,51	
4	3,95	3,97	4,48	—	— 0,02	— Com apreciável quantidade de Ni
5	41,60	41,62	41,44	—	— 0,02	
6	32,46	32,69	33,44	—	— 0,23	
7	39,58	39,41	39,11	—	+ 0,17	
8	26,56	26,66	27,01	—	+ 0,10	— Com 0,25 °/₀ de Ni
9	18,04	18,08	—	—	— 0,04	
10	34,94	35,12	—	—	— 0,28	
11	35,04	35,59	—	—	— 0,54	— Tinham quantidades apreciáveis de Zn, Ni e Co.
12	32,96	33,64	34,42	—	— 0,68	

(1) As análises foram efectuadas com a colaboração do Chefe de trabalhos do I. S. T., Abel de Carvalho e do auxiliar Sebastião Pereira.

(2) É necessário não exagerar a importância desta interferência que, como já se disse, é em geral de reduzida ordem de grandeza.

Em resumo pode afirmar-se que êste trabalho confirma a nossa anterior convicção de que *o método de Low é de aconselhar na análise corrente dos nossos minérios de manganês.*

E chama-se a atenção para o facto dêstes minérios apresentarem vulgarmente teores de umidade da ordem de 4–5 %, o que não torna lícita, sem o conhecimento dêsse teor, a comparação dos números obtidos em análises sôbre o minério «tal qual», com os valores referentes a «minério sêco a 100°».

Estudo das estruturas hiperestáticas pelos teoremas de Castigliano e pelo método de Beggs

PELO ENG.º CIVIL (I. S. T.) MANUEL ROCHA

ASSISTENTE DO I. S. T.
BOLSEIRO DO I. A. C.

(Continuação)

12) Estruturas: definição e generalidades

Designamos por *estrutura* um conjunto de peças lineares, isto é, peças com uma dimensão predominando sôbre as outras duas, de linha média (1) rectilínea ou não, ligadas entre si (ligações interiores) e aos apoios (ligações exteriores) de tal modo a constituírem um sistema indeformável (2).

Uma estrutura diz-se *interiormente indeformável* se, retirados os apoios, ainda se mantém um sistema indeformável (figs. 12 e 17); no caso contrário diz-se *interiormente deformável* (figs. 14, 18 e 23). Nestas estruturas há necessàriamente articulações ou juntas de dilatação, cuja existência contudo não é suficiente para que a estrutura seja interiormente deformável (fig. 24).

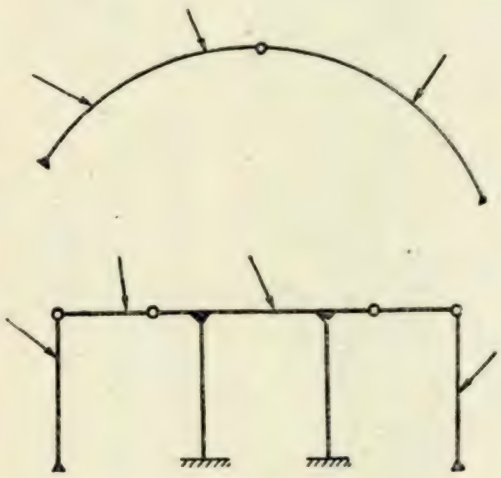


Fig. 23

As peças lineares que constituem uma estrutura são chamadas *barras* se têm a linha média rectilínea e *arcos* se têm a linha média curvilínea. As estruturas podem ser a duas ou três dimensões conforme as linhas médias das peças constituintes existem ou não num mesmo plano. São estruturas: as vigas, os arcos, os pórticos, as asnas, etc.

Recordemos algumas generalidades àcêrca da determinação das tensões elásticas num ponto P duma peça linear, de secção transversal constante ou ligeiramente variável, tendo por linha média uma curva plana ou de dupla curvatura e submetida a fôrças quaisquer que a mantêm em repouso (fig. 25).

Consideremos um sistema de eixos triortogonal, com a origem no centro de gravidade, G, da secção transversal que passa por P, e com os eixos Gy e Gz dirigidos segundo os eixos centrais de inércia desta secção. Seja $\vec{R}$ o vector principal (3) das fôrças actuantes sôbre a peça dum dos lados da secção, e $\vec{M}$ o momento em relação a G destas mesmas fôrças.

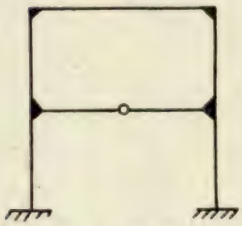


Fig. 24

A componente de $\vec{R}$ segundo Gx, N, é designada esfôrço normal na secção; dá origem a uma tensão elástica normal uniformemente distribuída na secção e de grandeza $\frac{N}{S}$, designando por S a área da secção.

(1) Chamamos linha média duma peça linear, ao lugar geométrico dos centros de gravidade das secções transversais da peça.

(2) Excluem-se as deformações elásticas, plásticas e térmicas.

(3) Designamos por vector principal dum sistema de fôrças, o vector livre soma das fôrças que constituem o sistema; preferimos esta designação à de resultante que damos ao vector axial (quando existe) equivalente a um sistema de fôrças.

As componentes de $\vec{R}$ segundo Gy e Gz, T_y e T_z, são designadas esforços transversos; originam na secção tensões tangenciais cuja distribuïção, em grandeza e direcção, depende da forma da secção transversal da peça. No caso da secção ser rectangular (fig. 26) as tensões tangenciais devidas a T_y e T_z são paralelas aos eixos Gy e Gz, e as suas grandezas τ_y e τ_z num ponto P (y, z) são dadas pelas conhecidas expressões:

$$\tau_y = \frac{T_y}{2\,I_z}\left(\frac{Y^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau_z = \frac{T_z}{2\,I_y}\left(\frac{Z^2}{4} - z^2\right),$$

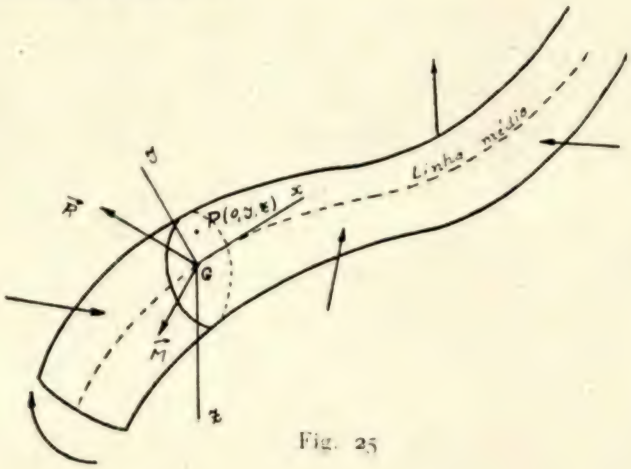


Fig. 25

onde I_y e I_z designam os momentos de inércia da secção em relação a Gy e Gz, e Y e Z as dimensões da secção. No caso das secções circular e em I, a distribuïção das tensões tangenciais devidas a T_y está representada esquemàticamente na fig. 27. Dum modo geral as componentes das tensões provocadas por T_y e T_z, respectivamente segundo Gy e Gz, podem ser calculadas pelos métodos da Resistência de Materiais.

As componentes do momento $\vec{M}$ segundo Gy e Gz, M_y e M_z, são designadas momentos flectores; provocam flexões que dão origem a tensões elásticas normais à secção e de grandezas dadas respectivamente pelas expressões:

$$\frac{M_y}{I_y}\,z \quad \text{e} \quad \frac{M_z}{I_z}\,y,$$

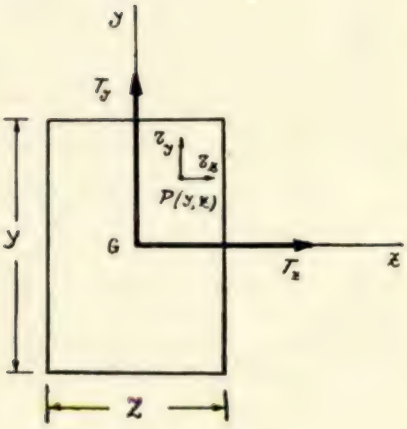


Fig. 26

no caso muito corrente, sobretudo na construção civil, da linha média da peça ter curvaturas suficientemente pequenas no ponto G. A componente de $\vec{M}$ segundo Gz, M_z, é designada momento de torsão; origina tensões tangenciais cuja distribuïção em direcção e grandeza depende da forma da secção. No caso da secção ser circular a tensão tangencial num ponto P é dada pela conhecida expressão:

$$\frac{M_z}{I_p}\,r,$$

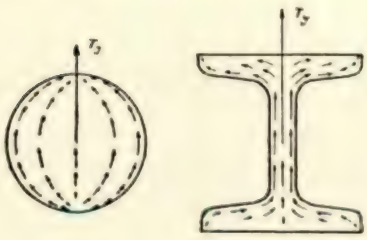


Fig. 27

onde r representa a distân-

cia de P ao centro da secção, e I_p o momento polar de inércia da secção em relação ao seu centro.

Em resumo: para determinarmos as tensões elásticas normal e tangencial actuantes num elemento de superfície duma secção transversal duma peça linear, basta conhecer para essa secção as duas grandezas vectoriais $\vec{R}$ e $\vec{M}$ ou, o que é equivalente, as seis grandezas escalares N, T_y, T_z, M_x, M_y e M_z. (1)

Para a peça se encontrar em boas condições de segurança estas tensões, normal e tangencial, devem satisfazer a certas relações dadas pelas chamadas teorias de resistência.

Consideremos agora o caso particular, muito importante nas aplicações, duma peça linear com um plano de simetria contendo a sua linha média e submetida a fôrças simètricamente dispostas em relação a êsse plano de simetria. Tomemos o plano xGy coincidente com o plano de simetria, e o eixo Gx tangente à linha média da peça (fig. 28).

Numa secção transversal qualquer da peça a resultante $\vec{R}$ existe no plano de simetria, e portanto a sua componente segundo Gz é nula; o momento $\vec{M}$ é paralelo ao eixo Gz, isto é, as componentes M_x e M_y são nulas. Daqui se conclue que, no caso particular de que nos estamos ocupando, basta dar uma definição escalar de momento numa secção transversal duma peça linear.

Portanto das seis grandezas escalares N, T_y, T_z, M_x, M_y e M_z, só N, T_y e M_z são diferentes de zero, isto é, bastam três grandezas escalares para determinarmos as tensões elásticas actuantes num elemento de superfície duma secção transversal duma peça linear submetida a fôrças simètricamente dispostas em relação a um plano de simetria da peça. Designamos de futuro estas grandezas respectivamente por N, T e M.

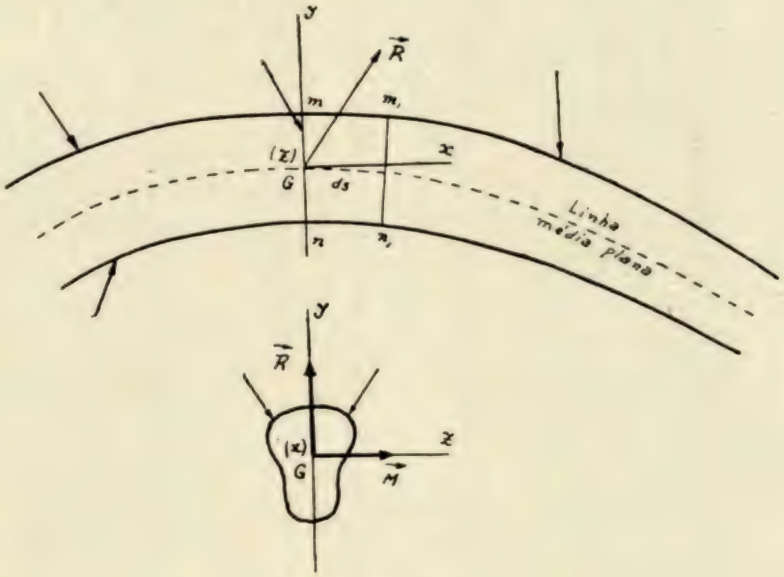
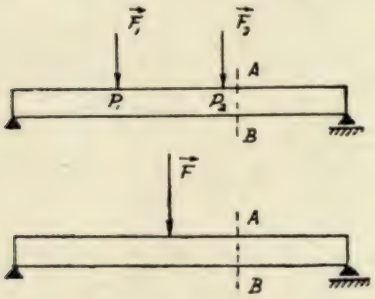


Fig. 28

(1) Esta afirmação só é legítima dentro da aproximação corrente da Resistência de Materiais. De facto não basta conhecer $\vec{R}$ e $\vec{M}$ para podermos determinar aquelas tensões elásticas.

Assim, consideremos a viga representada na figura ao lado, submetida às fôrças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$; seja AB uma secção transversal da viga na vizinhança à direita do ponto de aplicação de $\vec{F_2}$. Suponhamos a mesma viga submetida à acção da resultante $\vec{F}$ das fôrças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$.



O momento flector e o esfôrço transverso na secção AB são os mesmos nos dois casos, mas no entanto no primeiro caso há nos elementos de superfície de AB (em geral nos elementos da vizinhança de P_2) tensões elásticas complementares importantes provenientes da proximidade de $\vec{F_2}$.

Dum modo geral os resultados da Resistência de Materiais só são válidos a uma distância suficientemente grande dos pontos de aplicação das fôrças.

Vamos determinar a expressão da energia de deformação elástica da peça linear que estamos a tratar.

Consideremos um trôço da peça (fig. 28) compreendido entre duas secções transversais vizinhas mn e $m_1 n_1$; sejam s e s + ds as distâncias dos centros de gravidade destas secções, medidas sôbre a linha média da peça, a uma origem qualquer, por exemplo, um dos extremos da peça.

O trabalho realizado pelo esfôrço normal N aplicado ao trôço, isto é, a energia de deformação elástica do trôço devida ao esfôrço normal é, como vimos, dada pela expressão:

$$\frac{N^2\, ds}{2\, E\, S}.$$

Demonstra-se que a energia de deformação elástica devida ao esfôrço transverso T é dada pela expressão:

$$\alpha \frac{T^2\, ds}{2\, C\, S},$$

onde α é um coeficiente que depende da forma da secção transversal (para a secção rectangular é $\alpha = \frac{6}{5}$) e C representa o módulo de elasticidade transversal, dado pela expressão:

$$C = \frac{E}{2\,(1+\nu)},$$

na qual ν representa o coeficiente de Poisson da substância da peça.

Finalmente a energia de deformação elástica do trôço devida ao momento flector M tem a expressão:

$$\frac{M^2\, ds}{2\, E\, I}.$$

A expressão da energia de deformação elástica do trôço é: (1)

$$\frac{N^2\, ds}{2\, E\, S} + \alpha \frac{T^2\, ds}{2\, C\, S} + \frac{M^2\, ds}{2\, E\, I},$$

onde N, T e M são funções de s e das fôrças aplicadas à peça linear dum dos lados do trôço.

Portanto a energia de deformação elástica da peça linear é dada pela expressão:

15) $$\int_0^L \frac{N^2\, ds}{2\, E\, S} + \alpha \int_0^L \frac{T^2\, ds}{2\, C\, S} + \int_0^L \frac{M^2\, ds}{2\, E\, I},$$

designando por L o comprimento da linha média da peça.

---

(1) Em geral, quando um sólido está submetido à acção dum sistema de fôrças $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots \vec{F_n}$, a energia de deformação elástica não é igual à soma das energias devidas à aplicação das fôrças separadamente; só é igual quando os deslocamentos correspondentes $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ dependem só respectivamente de $F_1, F_2, \ldots F_n$. É o que se dá no caso do trôço considerado.

A energia de deformação elástica, U, duma estrutura plana constituída por m peças com plano de simetria coïncidente com o plano da estrutura e simètricamente carregadas em relação a êste plano, tem a expressão:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left(\int_0^L \frac{N^2\, ds}{E\,S} + \alpha \int_0^L \frac{T^2\, ds}{C\,S} + \int_0^L \frac{M^2\, ds}{E\,I} \right).$$

Na quási totalidade das aplicações é desprezível a energia devida ao esfôrço transverso, sendo também na maioria dos casos desprezível a energia devida ao esfôrço normal, isto é, basta geralmente considerar na expressão de U os termos onde entra M:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_0^L \frac{M^2\, ds}{E\,I}.$$

No caso duma peça linear qualquer submetida a quaisquer fôrças, para obtermos a expressão da energia de deformação elástica, temos de juntar ao segundo membro de 15) três termos, do mesmo tipo dos que considerámos, correspondentes a T_z, M_x e M_y.

13) Estruturas isostáticas e hiperestáticas

As fôrças actuantes sôbre as estruturas podem classificar-se em *cargas* e *reacções de apoios* [1]. As cargas são dadas e as reacções dos apoios dependem, dum modo geral, das cargas e da forma e substância das peças que constituem a estrutura.

Em virtude do exposto na alínea anterior, para definirmos a reacção dum apoio duma estrutura basta considerar o vector principal e o momento resultante do sistema de fôrças exercido pelo apoio. Dêste modo bastam, quando muito, seis variáveis para definirmos a reacção dum apoio duma estrutura.

Podemos tomar variáveis de natureza diversa para definirmos a reacção dum apoio, sendo contudo constante o número destas variáveis. Assim a reacção duma articulação pertencente a uma estrutura a três dimensões, tanto pode ser definida pelas três componentes da reacção segundo três direcções não coplanares, como pela grandeza da reacção e por dois ângulos que definem a sua direcção.

Os apoios usados na construção são de três tipos: com articulação e escorregamento, com articulação e com encastramento. O número de variáveis que definem a reacção de cada um dêstes tipos de apoio são, como é sabido, os do quadro seguinte:

	Estruturas a duas dimensões simètricamente carregadas	Estruturas a três dimensões
Apoio com articulação e escorregamento (sem atrito)	1	1
Apoio com articulação (sem atrito)	2	3
Apoio com encastramento (perfeito)	3	6

Entre as cargas aplicadas a uma estrutura e as reacções dos apoios existem duas equações vectoriais fornecidas pela estática, às quais correspondem três equações algébricas no caso particular das estruturas planas cujo plano é um plano de simetria da estrutura e das cargas aplicadas, e seis no caso geral.

---

[1] Designamos por reacção dum apoio duma construção o sistema de fôrças que o apoio exerce sôbre a construção.

Para a estrutura representada na fig. 29 as equações fornecidas pela estática, são:

$$\begin{cases} F_1 + F_2 - T_1 - T_2 - T_4 - T_5 = 0 \\ N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 0 \\ F_1\, h_1 + F_2\, h_2 + M_1 + M_4 + N_1\, d_1 + N_2\, d_2 + N_3\, d_3 + N_4\, d_4 = 0. \end{cases}$$

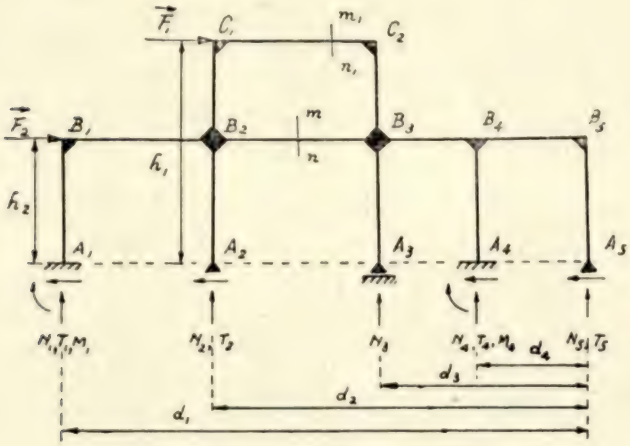


Fig. 29

É um sistema de três equações a onze incógnitas; a estática não nos fornece mais equações.

Consideremos agora o caso do pórtico interiormente deformável representado na fig. 30; a estática fornece as equações:

$$\begin{cases} F_1 - F_4 \cos\alpha + F_5 - T_1 - T_2 - T_3 - T_4 = 0 \\ F_2 + F_3 + F_4 \operatorname{sen}\alpha - N_1 - N_2 - N_3 - N_4 = 0 \\ F_1\, h_1 + F_2\, d_2 + F_3\, d_3 + F_4\, d_4 \operatorname{sen}\alpha - F_4\, h \cos\alpha + F_5\, h_5 - N_2\, l_2 - N_3\, l_3 + M_3 - N_4\, l_4 + M_4 = 0, \end{cases}$$

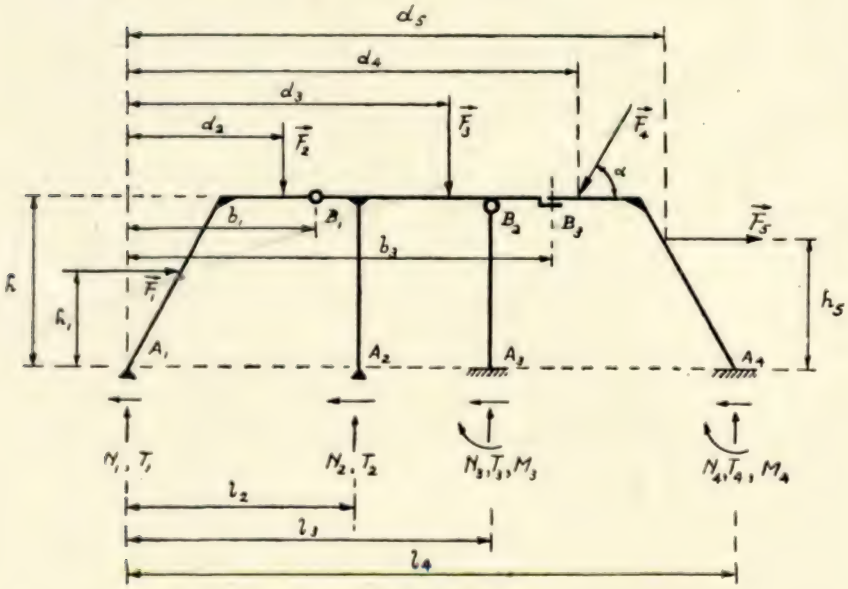


Fig. 30

que traduzem o equilíbrio de tôda a estrutura. Mas em virtude dêste pórtico ser uma estrutura interiormente deformável, constituída por quatro sistemas indeformáveis, a estática permite-nos ainda escrever mais 3×3 equações que traduzem o equilíbrio de $4 - 1 = 3$ dos sistemas indeformáveis constituintes (o sistema de equações já escrito traduz o equilíbrio dos quatro sistemas), por exemplo dos sistemas $B_3\ A_4$, $A_3\ B_2$ e $B_3\ A_2\ B_1$.

O equilíbrio de $B_3 A_4$ exprime-se por meio das equações:

$$\begin{cases} -F_4 \cos\alpha + F_5 - T_4 = 0 \\ -R_3 + F_4 \operatorname{sen}\alpha - N_4 = 0 \\ R_3 (l_4 - b_3) - F_4 h \cos\alpha - F_4 (l_4 - d_4) \operatorname{sen}\alpha + F_5 h_5 + M_4 = 0 \end{cases},$$

onde R_3 designa a grandeza, desconhecida, da fôrça, que é vertical, exercida através da junta de dilatação B_3. Para $A_3 B_2$ temos:

$$\begin{cases} R_{2H} - T_3 = 0 \\ R_{2V} - N_3 = 0 \\ T_3 h + M_3 = 0 \end{cases};$$

nestas equações R_{2H} e R_{2V} designam as componentes, sôbre a horizontal e a vertical, da fôrça desconhecida exercida através da articulação B_2.

Finalmente o equilíbrio de $B_3 A_2 B_1$ exprime-se pelas equações:

$$\begin{cases} R_{1H} - T_2 - R_{2H} = 0 \\ R_{1V} - N_2 + F_3 - R_{2V} + R_3 = 0 \\ R_{1H} h - R_{1V} (l_2 - b_1) + F_3 (d_3 - l_2) - R_{2H} h - R_{2V} (l_3 - l_2) + R_3 (b_3 - l_2) = 0 \end{cases},$$

onde R_{1H} e R_{1V} designam as componentes da fôrça exercida pela articulação B_1. Se entre estas nove equações eliminarmos R_{1H}, R_{1V}, R_{2H}, R_{2V} e R_3, que são grandezas desconhecidas, obtemos quatro equações relacionando as cargas com as variáveis que definem as reacções dos apoios. Em resumo, a estática fornece para o estudo do pórtico $4 + 3 = 7$ equações entre as dez variáveis N_1, T_1, N_2, T_2, N_3, T_3, M_3, N_4, T_4 e M_4.

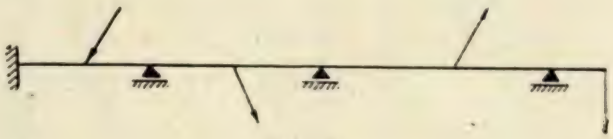


Fig. 31

Dum modo geral, no caso duma estrutura interiormente deformável constituída por n partes indeformáveis, as condições de equilíbrio de $n - 1$ das partes fornecem um certo número, K, de equações tendo por incógnitas *sòmente* as variáveis que definem as reacções dos apoios.

Em geral as equações dadas pela estática não são suficientes para a determinação das reacções dos apoios, e então a estrutura diz-se *exteriormente hiperestática*. No caso das equações serem em número suficiente a estrutura chama-se *exteriormente isostática*. Nas figuras 29 a 35 estão representadas estruturas exteriormente hiperestáticas e nas figs. 14, 17, 18, 20 e 36 a 38 estruturas exteriormente isostáticas.

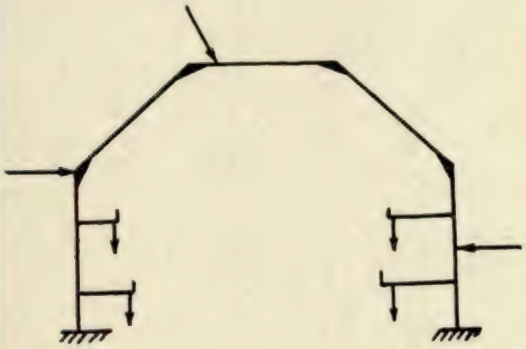


Fig. 32

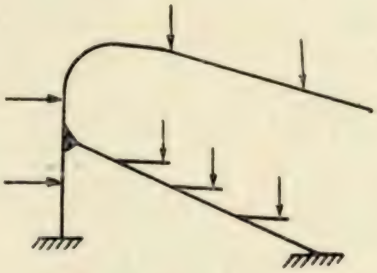


Fig. 33

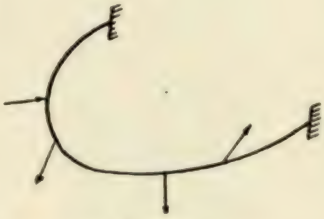


Fig. 34

Chama-se *grau de indeterminação ou hiperestaticidade exterior* duma estrutura à diferença, g_e, entre o número, n, de variáveis que definem as reacções dos apoios e o número de equações fornecidas pela estática, que são (3 ou 6) + K, sendo K nulo no caso das estruturas interiormente indeformáveis:

$$g_e = n - [(3 \text{ ou } 6) + K] .$$

Os graus de indeterminação exterior das estruturas representadas nas figs. 29 a 35, são:

Fig. 29 → $g_e = 11 - 3 = 8$
» 30 → $g_e = 10 - (3 + 4) = 3$
» 31 → $g_e = 6 - 3 = 3$
» 32 → $g_e = 6 - 3 = 3$
» 33 → $g_e = 6 - 3 = 3$
» 34 → $g_e = 12 - 6 = 6$
» 35 → $g_e = 24 - 6 = 18$.

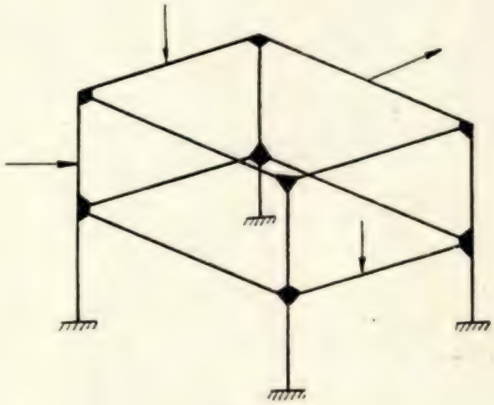


Fig. 35

Resolvido o sistema de equações dadas pela estática obtemos (3 ou 6) + K incógnitas expressas em função das restantes g_e que são designadas *incógnitas hiperestáticas exteriores.*

Deve notar-se que, por vezes, como é óbvio, no caso das estruturas interiormente deformáveis não se podem tomar quaisquer (3 ou 6) + K incógnitas para incógnitas hiperestáticas [1].

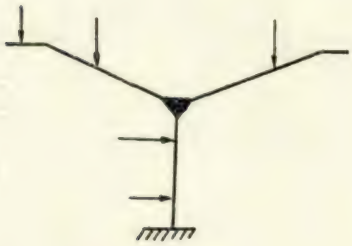


Fig. 36

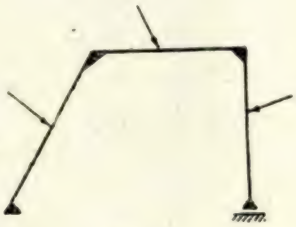


Fig. 37

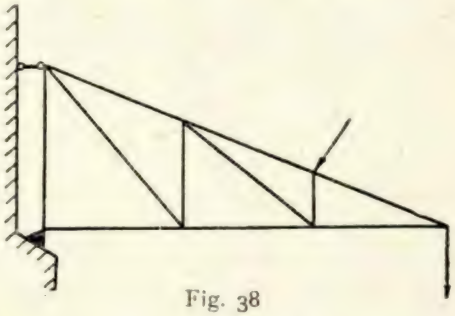


Fig. 38

No caso da estrutura representada na fig. 29, se resolvermos o sistema em relação a N_1, T_1 e M_1, obtemos estas incógnitas em função das restantes $g_e = 8$, que são as incógnitas hiperestáticas; podíamos ter resolvido o sistema em relação a quaisquer outras três incógnitas, isto é, podíamos tomar outras $g_e = 8$ incógnitas para incógnitas hiperestáticas exteriores.

Dada uma estrutura exteriormente hiperestática de grau de indeterminação g_e, se modificarmos os apoios (incluindo se fôr necessário a supressão de alguns dêles) de tal modo que desapareçam as g_e variáveis que são incógnitas hiperestáticas, a estrutura converte-se noutra exteriormente isostática que é denominada estrutura *exteriormente isostática correspondente* à estrutura dada.

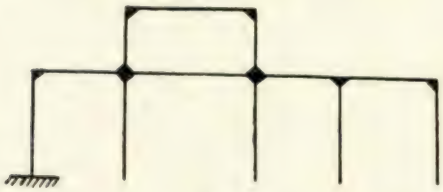


Fig. 39

Se suprimirmos na estrutura representada na fig. 29 todos os apoios excepto o da esquerda, desaparecem oito das variáveis que definem as reacções dos apoios, e a estrutura converte-se na estrutura exterior-

[1] A condição analítica para que umas certas (3 ou 6) + K incógnitas possam ser tomadas para incógnitas hiperestáticas, é que os seus coeficientes figurem num dos determinantes que podem ser tomados na matriz do sistema para determinante principal.

Fig. 40

mente isostática representada na fig. 39, que é uma das estruturas exteriormente isostáticas correspondentes à estrutura considerada; as estruturas representadas na fig. 40 são também estruturas exteriormente isostáticas correspondentes à estrutura da fig. 29.

Se na estrutura da fig. 30, que é exteriormente hiperestática de grau $g_e = 3$, modificarmos os apoios de modo a desaparecerem as variáveis T_1, T_2 e M_1 (estas variáveis podem ser tomadas para incógnitas hiperestáticas), obtemos uma estrutura exteriormente isostática correspondente (fig. 41); podíamos considerar outras.

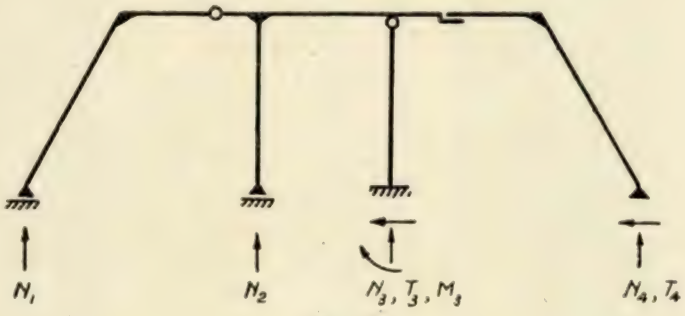


Fig. 41

Suprimindo um dos apoios na estrutura da fig. 34, obtemos uma estrutura exteriormente isostática correspondente.

Uma estrutura, exteriormente isostática ou hiperestática, é designada *interiormente isostática* se, para qualquer secção, as seis grandezas N, T_y, T_z, M_x, M_y e M_z, se podem determinar, *pela estática*, em função de tôdas as fôrças (cargas e reacções dos apoios) actuantes sôbre a estrutura; se houver secções para as quais não é possível esta determinação, a estrutura é designada *interiormente hiperestática*.

Se a estrutura é plana e está simètricamente carregada em relação ao seu plano, ela é interiormente isostática ou hiperestática conforme as três grandezas N, T e M se podem ou não determinar para qualquer secção em função das cargas e reacções dos apoios.

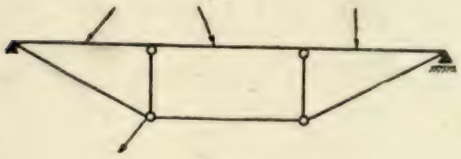


Fig. 42

Consideremos a estrutura da fig. 29. Numa secção qualquer das peças $A_1B_1B_2$, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 e $A_5B_5B_3$ podemos determinar N, T e M em função das cargas e das reacções dos apoios; numa secção da peça $B_2C_1C_2B_3$, os valores de N, T e M dependem não sòmente das cargas e reacções de apoios mas também das fôrças que a barra B_2B_3 exerce em B_2, fôrças que não podem ser determinadas pela estática. A estrutura é interiormente hiperestática.

As estruturas representadas nas figs. 14, 17, 18, 20, 31 a 34, e 36 a 38, são interiormente isostáticas enquanto que as das figs 24, 35, 42, 43 e 44 são interiormente hiperestáticas.

Se na estrutura da fig. 29 cortarmos a barra B_2B_3 numa secção mn, ela converte-se numa estrutura interiormente isostática; as tensões que se exerciam através da secção cortada são definidas por três variáveis: esfôrço normal, esfôrço transverso e momento flector. Se colocarmos uma articulação na secção mn e uma

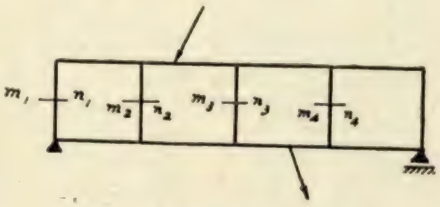


Fig. 43

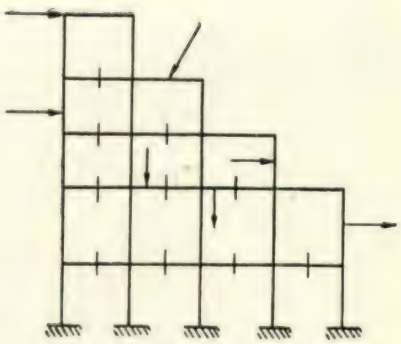


Fig. 44

ligação do tipo apoio com articulação e escorregamento na secção m_1n_1 (fig. 29), obtemos também uma estrutura interiormente isostática; como anteriormente, desapareceram três das variáveis que definiam as acções através das secções modificadas, uma variável na secção mn e duas na secção m_1n_1.

Dum modo geral, dada uma estrutura interiormente hiperestática, efectuemos cortes ou criemos articulações, ligações do tipo apoio com escorregamento, etc., de modo a transformá-la numa estrutura interiormente isostática; esta é designada *estrutura interiormente isostática correspondente* à estrutura dada.

Chama-se *grau de indeterminação ou hiperestaticidade interior* duma estrutura ao número g_i de variáveis que definiam as acções através das secções modificadas e que desapareceram na estrutura interiormente isostática correspondente.

Estas g_i variáveis são designadas *incógnitas hiperestáticas interiores.*

Os graus de indeterminação interior das estruturas das fig. 24, 35, 42, 43 e 44, são:

fig. 24 → $g_i = 2$
» 35 → $g_i = 6 \times 5 = 30$
» 42 → $g_i = 1$
» 43 → $g_i = 4 \times 3 = 12$
» 44 → $g_i = 10 \times 3 = 30$.

Chama-se *grau de indeterminação ou hiperestaticidade, g, duma estrutura,* à soma dos graus de indeterminação exterior e interior:

$$g = g_e + g_i .$$

O número g é independente da estrutura isostática correspondente considerada. As g incógnitas hiperestáticas interiores e exteriores são designados genèricamente *incógnitas hiperestáticas.*

14) Estudo das estruturas exteriormente hiperestáticas e interiormente isostáticas

Designemos por $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ as cargas actuantes numa estrutura exteriormente hiperestática e interiormente isostática.

Consideremos uma estrutura exteriormente isostática correspondente e designemos por $R_1, R_2, \ldots R_{g_e}$ as g_e incógnitas hiperestáticas exteriores que supomos serem grandezas de fôrças ou de momentos de binários.

Imaginemos a estrutura isostática correspondente submetida às cargas e às fôrças e momentos binários cujas grandezas, desconhecidas, são as incógnitas hiperestáticas. Por se tratar duma estrutura interiormente isostática, podemos determinar, para uma secção transversal qualquer duma peça constituinte da estrutura, as três (N, T, M) ou seis $(N, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z)$ variáveis, que definem a distribuïção das tensões elásticas na secção, em função das cargas e das incógnitas hiperestáticas. Mas, como vimos na alínea 12), podemos exprimir a energia de deformação elástica da estrutura, U, em função dessas variáveis, e portanto conclui-se que para as estruturas que estamos tratando podemos calcular U em função das cargas e das incógnitas hiperestáticas:

$$U = f\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n, R_1, R_2, \ldots R_{g_e}\right).$$

Ora o primeiro teorema de Castigliano afirma que:

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial R_1} = \delta_1 \\ \dfrac{\partial U}{\partial R_2} = \delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial U}{\partial R_{g_e}} = \delta_{g_e}\,, \end{cases}$$

onde $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{g_e}$ representam os deslocamentos correspondentes respectivamente a $R_1, R_2, \ldots R_{g_e}$.

No caso de não haver assentamentos, os valores das incógnitas hiperestáticas hão-de ser tais que os deslocamentos correspondentes sejam nulos:

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial R_1} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial R_2} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial U}{\partial R_{g_e}} = 0\,. \end{cases}$$

Êste sistema de g_e equações permite determinar os valores das g_e incógnitas hiperestáticas.

Conhecidos os valores destas incógnitas podemos calcular para uma secção qualquer as três, N, T e M, ou seis, N, T_y, T_z, M_x, M_y e M_z, variáveis, e portanto determinar as tensões elásticas actuantes nessa secção.

Em geral constroem-se os apoios com a preocupação de tornar despreziveis os efeitos dos assentamentos sôbre as tensões desenvolvidas na estrutura; são contudo correntes os casos em que estes efeitos são muito importantes.

Na maioria dos casos é difícil calcular os valores, δ_i, das grandezas dos assentamentos sofridos pelos apoios, mas se estes valores forem conhecidos (¹) o sistema de equações 16) permite determinar os valores das incógnitas hiperestáticas exteriores. É muito importante o caso do assentamento dum apoio variar linear e homogèneamente com a reacção que êle exerce sôbre a estrutura; neste caso é:

$$\delta_i = K_i\, R_i\,,$$

sendo K_i uma constante.

Quando se trata de escolher o tipo de estrutura a usar para resolver um certo problema de construção, é fundamental atender ao facto das tensões desenvolvidas nas estruturas exteriormente hiperestáticas dependerem dos assentamentos dos apoios, enquanto que nas exteriormente isostáticas não dependem quando os assentamentos são pequenos.

O método de estudo das estruturas exteriormente hiperestáticas e interiormente isostáticas exposto, que é o único geral, havendo contudo outros que lhe são equivalentes, topa, assim como estes, com uma grande dificuldade: o trabalho necessário para o estabelecimento e reso-

---

(¹) Àcêrca do cálculo de assentamentos é muito interessante a obra: «Théorie du tassement des couches argileuses» por Terzaghi e Fröhlich (Dunod, Paris).

lução pelos métodos ordinários do sistema de equações lineares a que conduzem, no caso de estruturas com grau de indeterminação elevado. Vence-se esta dificuldade recorrendo freqüentemente a métodos de cálculo particulares, que são muito numerosos, e a métodos experimentais, dos quais estudaremos adiante o de Beggs.

A dificuldade de resolução de sistemas com um grande número de equações lineares, aparece em muitos outros problemas científicos e técnicos e por isso têm sido várias as tentativas feitas para a resolver. Entre estas citamos a do prof. Wilbur [1] que construiu uma máquina permitindo a resolução em poucas horas dum sistema até nove equações.

15) Aplicações

a) Determinar as reacções dos apoios duma viga contínua de secção rectangular com três apoios de nível, submetida a uma carga vertical uniformemente distribuída de intensidade p (fig. 45).

É:

$$n = 3 .$$

As equações fornecidas pela estática são:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = p\,L \\ N_1 \dfrac{L}{2} - N_3 \dfrac{L}{2} = 0 \end{cases} .$$

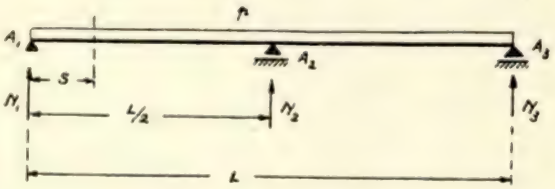


Fig. 45

Portanto:

$$g_e = 3 - 2 = 1 .$$

Tomemos N_1 para incógnita hiperestática; vem:

$$\begin{cases} N_2 = p\,L - 2\,N_1 \\ N_3 = N_1 \end{cases} .$$

A energia de deformação elástica da estrutura é só função de p e N_1; tem a expressão:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M^2\,ds}{EI} + \frac{6}{5} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{T^2\,ds}{CS} \right) ,$$

pois $N = 0$.

A incógnita hiperestática há-de satisfazer à equação:

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = 0 ,$$

---

[1] «The mechanical solution of simultaneous equations», Journal of the Franklin Institute, vol. 222, No. 6, Dez, 1936. A máquina construída, que está no Massachusetts Institute of Technology, custou cêrca de 120 contos.

pois supomos que os apoios não sofrem assentamentos. Se sofressem, o segundo membro desta equação era a distância do apoio A_1 à recta definida por A_2 e A_3 [1].

É:

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \sum_{i=1}^{2} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial N_1} ds + \frac{6}{5} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{T}{CS} \frac{\partial T}{\partial N_1} ds \right) .$$

No primeiro tramo é:

$$M = N_1 s - \frac{p s^2}{2}$$

e

$$T = \frac{dM}{ds} = N_1 - p s .$$

Logo o primeiro termo do somatório é:

$$\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(N_1 s - \frac{p s^2}{2} \right) s \, ds + \frac{6}{5 C S} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(N_1 - p s \right) ds .$$

Visto N_3 ser igual a N_1, conclui-se que o segundo termo do somatório é igual ao primeiro. Portanto, vem:

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(N_1 s - \frac{p s^2}{2} \right) s \, ds + \frac{12}{5 C S} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(N_1 - p s \right) ds .$$

Donde:

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \frac{2}{EI} \left(N_1 \frac{L^3}{24} - p \frac{L^4}{128} \right) + \frac{12}{5 C S} \left(N_1 \frac{L}{2} - p \frac{L^2}{8} \right) .$$

Igualando a zero e fazendo:

$$C = \frac{2}{5} E$$

e

$$I = \frac{h^2}{12} S ,$$

onde h designa a altura da viga, obtemos o valor da incógnita hiperestática:

$$N_1 = \frac{3 (L^2 + 4 h^2)}{16 (L^2 + 3 h^2)} p L .$$

Supondo pequena a relação $\frac{h}{L}$, vem, aproximadamente:

$$N_1 = \frac{3}{16} \left[1 + \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] p L .$$

---

[1] Pois o primeiro teorema de Castigliano impõe que o sólido esteja impossibilitado de movimento de conjunto em relação ao sistema de referência dos deslocamentos dos pontos do sólido.

Se tivéssemos desprezado na expressão de U a energia devido ao esfôrço transverso, vinha:

$$N_1 = \frac{3}{16} p L .$$

Portanto concluímos que no caso de ser pequena a relação $\frac{h}{L}$ podemos desprezar a energia devida ao esfôrço transverso; o êrro relativo que vem para N_1 é igual a $\left(\frac{h}{L}\right)^2$.

Os valores das grandezas das reacções dos apoios A_2 e A_3, são:

$$N_2 = p L - \frac{3}{8} p L = \frac{5}{8} p L$$

e

$$N_3 = N_1 = \frac{3}{16} p L .$$

b) Determinar as reacções dos apoios do pórtico de secção constante representado na fig. 46.

O número de variáveis que definem as reacções dos apoios, é:

$$n = 6 \quad .$$

Visto êste pórtico ser uma estrutura plana, interiormente indeformável, submetida a uma fôrça existente no plano da estrutura, a estática fornece três equações, e portanto o grau de indeterminação exterior é:

$$g_e = 6 - 3 = 3 .$$

Tomemos para incógnitas hiperestáticas N_1, T_1 e M_1.

Elas devem satisfazer ao sistema:

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial T_1} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_1} = 0 \quad ,$$

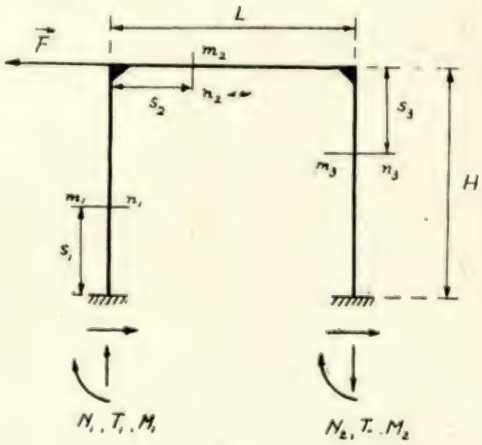


Fig. 46

desde que não se dêem assentamentos.

A energia de deformação elástica da estrutura, U, é igual à soma das energias das três barras que a constituem. Consideramos na expressão de U sòmente o têrmo correspondente ao momento flector, pois os outros termos são em geral desprezíveis.

Nas secções $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ e $m_3 n_3$ definidas respectivamente pelas abcissas s_1, s_2 e s_3, os momentos flectores, expressos nas incógnitas hiperestáticas, são:

$$M_{s_1} = M_1 - T_1 s_1$$
$$M_{s_2} = M_1 - T_1 H + N_1 s_2$$
$$M_{s_3} = M_1 - T_1 (H - s_3) + N_1 L - F s_3 .$$

E:

$$U = \frac{1}{2}\left(\int_0^H \frac{M_{s_1}^2\, ds_1}{EI} + \int_0^L \frac{M_{s_2}^2\, ds_2}{EI} + \int_0^H \frac{M_{s_3}^2\, ds_3}{EI}\right) \quad ;$$

portanto:

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^H M_{s_1} \frac{\partial M_{s_1}}{\partial N_1}\, ds_1 + \int_0^L M_{s_2} \frac{\partial M_{s_2}}{\partial N_1}\, ds_2 + \int_0^H M_{s_3} \frac{\partial M_{s_3}}{\partial N_1}\, ds_3\right) \quad .$$

e anàlogamente para $\frac{\partial U}{\partial T_1}$ e $\frac{\partial U}{\partial M_1}$.

Substituindo valores nas expressões das derivadas de U e igualando a zero, vem:

$$\begin{cases} \int_0^L \left(M_1 - T_1 H + N_1 s_2\right) s_2\, ds_2 + \int_0^H \left[M_1 - T_1\left(H - s_3\right) + N_1 L - F s_3\right] L\, ds_3 = 0 \\ -\int_0^H \left(M_1 - T_1 s_1\right) s_1\, ds_1 - \int_0^L \left(M_1 - T_1 H + N_1 s_2\right) H\, ds_2 + \\ + \int_0^H \left[M_1 - T_1\left(H - s_3\right) + N_1 L - F s_3\right]\left(s_3 - H\right) ds_3 = 0 \\ \int_0^H \left(M_1 - T_1 s_1\right) ds_1 + \int_0^L \left(M_1 - T_1 H + N_1 s_2\right) ds_2 + \int_0^H \left[M_1 - T_1\left(H - s_3\right) + N_1 L - F s_3\right] ds_3 = 0. \end{cases}$$

Efectuando operações, vem:

$$\begin{cases} 3\,(L + 2H)\, M_1 - 3H(L + 2H)\, T_1 + 2L(L + 3H)\, N_1 = 3FH^2 \\ -\left(L + H\right) M_1 + H\left(L + \frac{2}{3}H\right) T_1 - \frac{L}{2}\left(L + H\right) N_1 = -F\frac{H^2}{6} \\ \left(L + 2H\right) M_1 - H\left(L + H\right) T_1 + L\left(\frac{L}{2} + H\right) N_1 = F\frac{H^2}{2} \quad . \end{cases}$$

A solução dêste sistema é:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{3H^2}{6LH + L^2} F \\ T_1 = \frac{1}{2} F \\ M_1 = \frac{3H^2 + LH}{12H + 2L} F \quad . \end{cases}$$

Conhecidos os valores das incógnitas hiperestáticas podemos determinar o esfôrço normal, o esfôrço transverso e o momento flector numa secção qualquer do pórtico e portanto as tensões elásticas desenvolvidas.

c) Vamos agora estudar os arcos.

Na construção de alvenaria o arco resolve o problema da transposição dum vão sem impor tracções às juntas. Tal como no caso duma ponte suspensa cujo cabo flexível suporta as cargas verticais estando sòmente submetido a tracções, o arco de alvenaria, que pode ser visto como um funicular invertido, suporta as cargas verticais estando submetido sòmente a compressões.

Na construção de aço, betão e betão armado não se é obrigado, como na alvenaria, a evitar as tensões de tracção; contudo, usando arcos em vez de vigas rectilíneas, êles podem ser estudados de tal modo que grande parte da carga seja equilibrada por esforços normais; reduzindo dêste modo as acções dos momentos flectores, obtemos soluções mais económicas no caso dos vãos serem grandes.

Os arcos, tal como foram definidos, são estruturas interiormente isostáticas.

Os arcos de três articulações, duas nas nascenças e a terceira geralmente no fecho, são estruturas exteriormente isostáticas. De facto são quatro as variáveis que definem as reacções dos apoios e a estática fornece também quatro equações, três traduzindo o equilíbrio de tôda a estrutura e uma o equilíbrio de rotação de uma das partes que constituem o arco de três articulações.

Os arcos de duas articulações nas nascenças são sistemas interiormente hiperestáticos. Vejamos como se calculam as reacções. Designemos por N_1, T_1, N_2 e T_2 as componentes das reacções dos apoios sôbre a horizontal A_1x e a vertical A_1y (fig. 47).

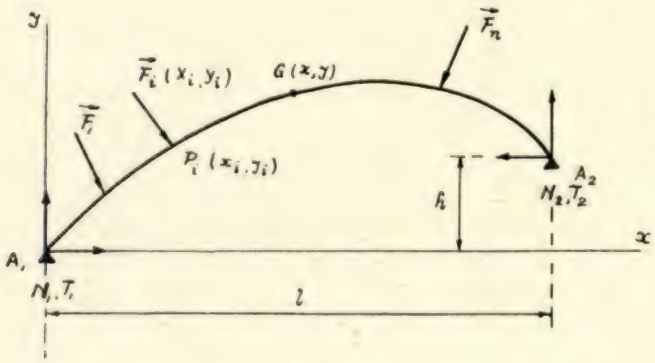


Fig. 47

A estática impõe sòmente as equações:

$$\begin{cases} \sum_i X_i + T_1 - T_2 = 0 \\ \sum_i Y_i + N_1 + N_2 = 0 \\ \sum_i (X_i\, y_i - Y_i\, x_i) - l\, N_2 - h\, T_2 = 0, \end{cases}$$

onde X_i e Y_i designam as componentes duma carga $\vec{F}_i$, respectivamente segundo A_1x e A_1y, e x_i e y_i as coördenadas do ponto P_i de aplicação da carga $\vec{F}_i$.

O grau de indeterminação exterior é:

$$g_e = 4 - 3 = 1 \quad .$$

Se tomarmos T_1 para incógnita hiperestática, vem:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{h}{l} T_1 - \frac{1}{l}\left[\sum_i \left(X_i y_i - Y_i x_i\right) - h \sum_i X_i\right] - \sum_i Y_i \\ N_2 = -\frac{h}{l} T_1 + \frac{1}{l}\left[\sum_i \left(X_i y_i - Y_i x_i\right) - h \sum_i X_i\right] \\ T_2 = T_1 + \sum_i X_i \quad . \end{cases}$$

A incógnita T_1 deve satisfazer à equação:

$$\frac{\partial U}{\partial T_1} = -C \quad ,$$

onde C representa o assentamento (aumento de l) dum apoio em relação ao outro. Portanto, se considerarmos sòmente a energia devida ao momento flector, vem:

$$\int_0^L \frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial T_1} ds = -C \quad ,$$

designando por L o comprimento da linha média do arco. O momento flector numa secção cujo centro de gravidade, G, tem coordenadas x e y, é dado pela expressão:

$$M = -y T_1 + x N_1 + \Sigma M' \quad ,$$

onde $\Sigma M'$ representa a soma dos momentos em relação a G das cargas situadas à esquerda da secção onde o momento flector é M.

Substituindo valores, vem:

$$\frac{1}{E} \int_0^L \frac{1}{I} \left(-y T_1 + x N_1 + \Sigma M'\right) \left(-y + \frac{h}{l} x\right) ds = -C \quad .$$

Quando o arco está submetido a cargas concentradas, êste integral tem de ser decomposto em parcelas correspondentes aos troços do arco compreendidos entre os pontos de aplicação dessas cargas, pois na função integranda figura $\Sigma M'$; vem:

$$\frac{1}{E} \left(\int_0^{L_1} \ldots ds + \int_{L_1}^{L_2} \ldots ds + \ldots + \int_{L_{i-1}}^{L_i} \ldots ds + \ldots \right) = -C \quad ,$$

onde L_1, L_2, ... L_{i-1}, L_i, ... representam os comprimentos que definem as posições dos centros de gravidade das secções nas quais actuam as cargas concentradas.

Calculados os valores dos integrais obtém-se uma equação cuja solução é o valor da incógnita hiperestática T_1.

Em geral os integrais que figuram nas equações atrás obtidas, calculam-se por métodos aproximados, numéricos ou gráficos. Se fôr conhecida a equação da linha média do arco e a lei de variação do momento de inércia I, os integrais podem ser calculados pelos métodos analíticos correntes.

Estudemos o arco encastrado nas nascenças.

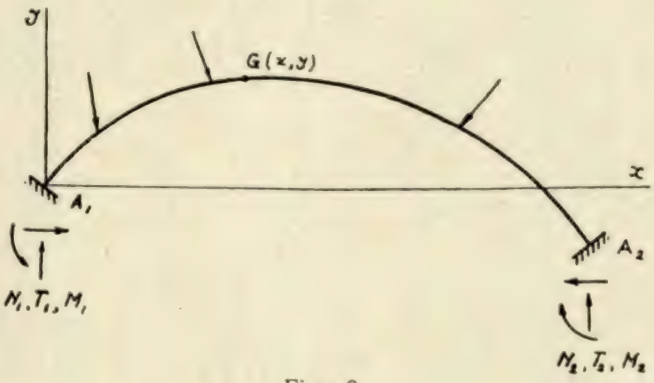


Fig. 48

É uma estrutura exteriormente hiperestática de grau de indeterminação $g_e = 6 - 3 = 3$. Tomemos N_1, T_1 e M_1 (fig. 48) para incógnitas hiperestáticas; elas devem satisfazer ao sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial N_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial T_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial M_1} = 0 \end{cases} ,$$

supondo que não há assentamentos. Considerando sòmente a energia devida ao momento flector M, vem:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^L \frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial N_1} ds = 0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^L \frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial T_1} ds = 0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^L \frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial M_1} ds = 0 \end{cases} ,$$

designando por L o comprimento da linha média do arco.

O momento flector na secção cujo centro de gravidade tem coordenadas x e y, tem a expressão:

$$M = -M_1 + x N_1 - y T_1 + \Sigma M' ,$$

onde $\Sigma M'$ tem o mesmo significado que anteriormente.

Portanto vem:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^L \frac{1}{I} \left(-M_1 + x N_1 - y T_1 + \Sigma M' \right) x \, ds = 0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^L \frac{1}{I} \left(-M_1 + x N_1 - y T_1 + \Sigma M' \right) y \, ds = 0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^L \frac{1}{I} \left(-M_1 + x N_1 - y T_1 + \Sigma M' \right) ds = 0 \end{cases} ,$$

no caso do arco ser homogéneo.

Resolvido êste sistema de equações, obtemos os valores das incógnitas hiperestáticas N_1, T_1 e M_1, em função das quais podemos determinar as tensões elásticas numa secção qualquer do arco.

16) Influência de uma variação de temperatura e de outras causas

Na alínea anterior estudámos as estruturas exteriormente hiperestáticas e interiormente isostáticas supondo que elas sofriam sòmente deformação devida às cargas. Mas as estruturas podem sofrer outras deformações, como por exemplo as devidas a variações de temperatura, e à retracção no caso das estruturas de betão.

Nas estruturas exteriormente isostáticas as reacções dos apoios não dependem de quaisquer causas que provoquem uma pequena deformação da estrutura. De facto, neste caso, as reacções, por serem dadas pela estática, só dependem das cargas e das características geométricas da estrutura e portanto se esta sofrer uma pequena deformação as reacções, por razão de continuïdade, sofrem pequenas variações desprezíveis. No caso da estrutura representada na fig. 49, as variáveis N_1, T_1 e N_2, que definem as reacções dos apoios, devem satisfazer às equações:

$$\begin{cases} X + T_1 = 0 \\ Y + N_1 + N_2 = 0 \\ yX - xY - lN_2 = 0 \end{cases}$$

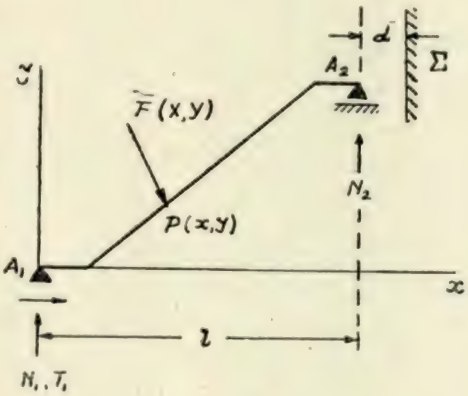


Fig. 49

Se a estrutura sofrer uma variação de temperatura, N_1, T_1 e N_2 sofrem sòmente pequenas variações desprezíveis, devidas aos deslocamentos de P e A_2 que provocam variações de x, y e l. Se a variação de temperatura fôr tal que o deslocamento de A_2 seja maior que a sua distância, d, a um sólido Σ, já as reacções sofrem variações que podem ser importantes; não se verifica a continuïdade de que falámos, pois a deformação foi tal que entrou a actuar sôbre a estrutura uma nova fôrça.

Se uma estrutura, além de exteriormente isostática, fôr também interiormente isostática, as tensões num ponto qualquer são independentes duma pequena deformação que a estrutura sofra, pois elas só dependem das cargas e das reacções dos apoios. Estudaremos noutra alínea o caso da estrutura ser interiormente hiperestática.

Nas estruturas exteriormente hiperestáticas as reacções dos apoios, e portanto as tensões, dependem das deformações que a estrutura sofra, visto os valores das reacções serem obtidos a partir de equações nas quais figuram os deslocamentos sofridos por certos pontos da estrutura.

Vejamos como se podem calcular as tensões nos pontos duma estrutura exteriormente hiperestática e interiormente isostática, quando esta sofre uma pequena deformação, além da deformação devida às cargas. É costume calcular separadamente as tensões devidas à deformação provocada pelas cargas, e as tensões devidas a outra deformação.

Para determinarmos estas tensões começamos por considerar uma estrutura exteriormente isostática correspondente e supomos que esta sofre a deformação. Aplicamos à estrutura as fôrças e momentos de binários cujas grandezas são as incógnitas hiperestáticas. Estas devem ter valores tais que os apoios devem regressar à posição que ocupavam na estrutura dada.

Aplicação.

Calcular as reacções dos apoios da estrutura representada na fig. 50, submetida a cargas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_n$, supondo que ela sofre uma variação de temperatura Δt.

As $n = 9$ variáveis, $N_1, T_1, M_1, N_2, \ldots N_4$, que definem as reacções são dadas pelas expressões:

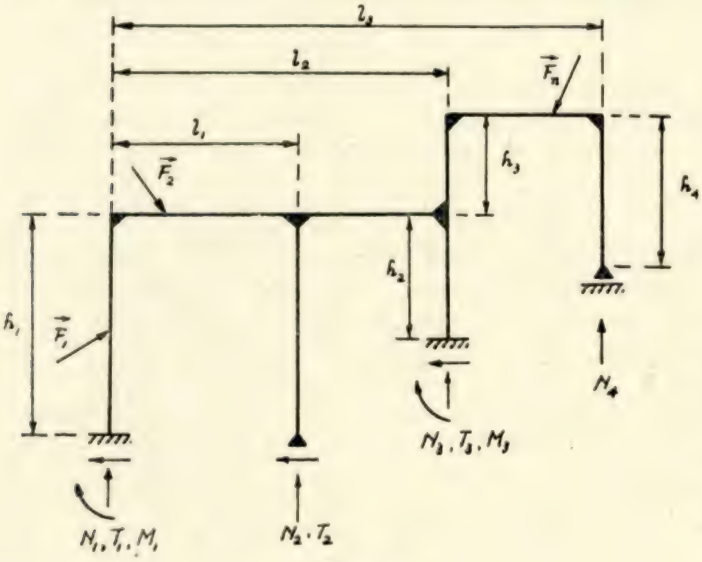


Fig. 50

$$N_1 = N'_1 + N''_1$$
$$T_1 = T'_1 + T''_1$$
$$M_1 = M'_1 + M''_1$$
$$N_2 = N_2' + N_2''$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_4 = N_4' + N_4'' \quad ,$$

onde N_1', T_1', M_1', ... N_4' designam os valores que tomam as variáveis que definem as reacções quando a estrutura é submetida isotèrmicamente à acção das cargas, e N_1'', T_1'', M_1'', ... M_4'' os valores dessas variáveis quando, retiradas as cargas, a estrutura sofre a variação de temperatura. As primeiras parcelas dos segundos membros calculam-se como foi indicado na alínea anterior.

Para calcularmos as reacções devidas à variação de temperatura, retiramos as cargas e consideramos uma estrutura exteriormente isostática correspondente, por exemplo, a representada na fig. 51; as incógnitas hiperestáticas são portanto N_2'', T_2'', N_3'', T_3'', M_3'' e N_4'', em função das quais se pode determinar a energia de deformação elástica U.

Quando esta estrutura sofre a variação de temperatura Δt, dilata-se livremente e toma a configuração representada na fig. 51 a traço interrompido. As incógnitas hiperestáticas devem satisfazer ao sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial N_2''} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial T''_2} = d_1 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial N_3''} = -d_3 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial T_3''} = d_2 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial M_3''} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial N_4''} = -d_4 . \end{cases}$$

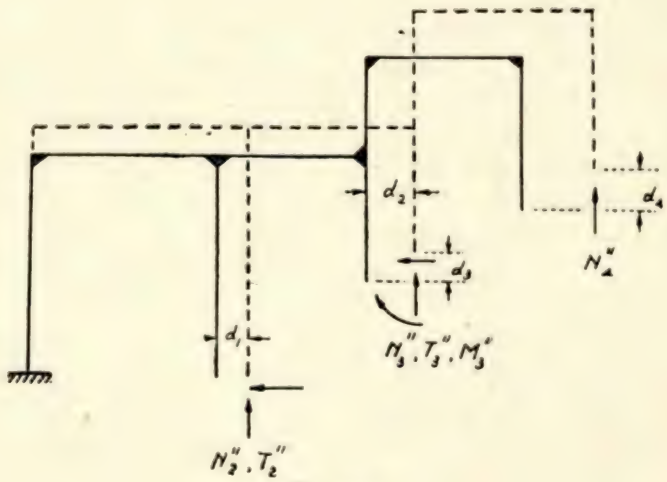


Fig. 51

É:

$$d_1 = l_1 \lambda \Delta t$$
$$d_2 = l_2 \lambda \Delta t$$
$$d_3 = (h_1 - h_2) \lambda \Delta t$$
$$d_4 = (h_1 + h_3 - h_4) \lambda \Delta t ,$$

designando por λ o coeficiente de dilatação linear da substância da estrutura.

Consideremos agora o arco encastrado nas nascenças representado na fig. 52. Calculemos as reacções dos apoios quando o arco sofre uma variação de temperatura Δt.

Tomemos para incógnitas hiperestáticas N_2, T_2 e M_2; elas devem satisfazer ao sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial N_2} = d_1 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial T_2} = -d_2 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial M_2} = 0 , \end{cases}$$

sendo:

$$d_1 = l \lambda \Delta t \operatorname{sen} \alpha$$

$$d_2 = l \lambda \Delta t \cos \alpha ;$$

nestas expressões, l representa a distância entre os apoios, α o ângulo da secção de encastramento do apoio A_2 com a direcção A_1A_2, e λ o coeficiente de dilatação linear da substância do arco.

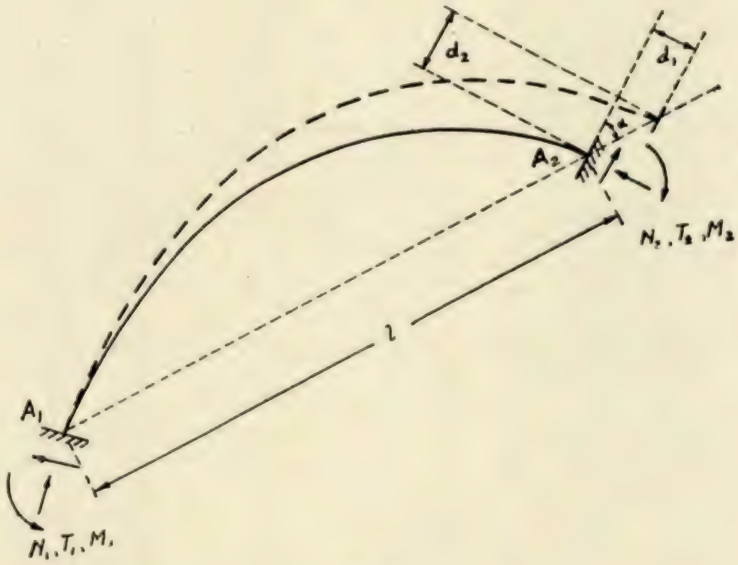


Fig. 52

Consideremos finalmente o pórtico $A_1B_1B_2A_2$ encastrado em A_1 e A_2, representado na fig. 53. Suponhamos que as colunas, A_1B_1 e A_2B_2, sofrem uma variação de temperatura, Δt, e que a temperatura da peça B_1B_2 também varia mas não uniformemente, como sucede com freqüência; sejam Δt_0 e Δt_1 as variações de temperatura sofridas respectivamente pela face inferior e superior de B_1B_2, e admitamos que a temperatura final varia linearmente ao longo da altura, h, da peça.

Tomemos para incógnitas hiperestáticas as variáveis N_2, T_2 e M_2, que definem a reacção do apoio A_2. A estrutura isostática correspondente toma, após sofrer as variações de temperatura, a configuração indicada na fig. 53 a traço interrompido.

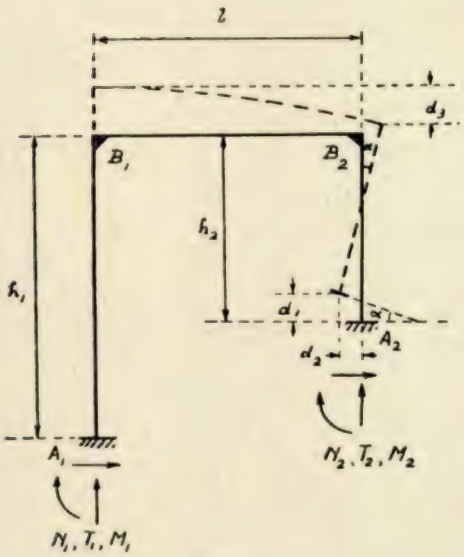


Fig. 53

É fácil mostrar que a linha média da peça B_1B_2 se converte num arco de circunferência cujo raio, r, é dado pela expressão:

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_0}{h} \lambda ,$$

onde λ representa o coeficiente de dilatação linear da substância da peça. Se a peça tivesse inicialmente a linha média curvilínea e plana, o segundo membro desta expressão dava a variação da curvatura. No caso da peça se poder dilatar livremente, a deformação de B_1B_2 dá-se sem aparecerem tensões; estas só aparecem quando a variação de temperatura não seguir uma lei linear.

As incógnitas hiperestáticas devem satisfazer ao sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial N_2} = -d_1 \\ \dfrac{\partial U}{\partial T_2} = d_2 \\ \dfrac{\partial U}{\partial M_2} = -\alpha . \end{cases}$$

Onde:

$$d_1 = h_1 \lambda \Delta t - d_3 - h_2 \lambda \Delta t ,$$

devendo d_3 satisfazer aproximadamente à relação:

$$r^2 + l^2 = (r + d_3)^2 ,$$

donde:

$$d_3 = \frac{l^2}{2r} ,$$

visto d_3 ser muito pequeno em face de r. Portanto:

$$d_1 = \left(h_1 - h_2\right) \lambda \Delta t - \frac{l^2}{2h} \left(\Delta t_1 - \Delta t_0\right) \lambda .$$

O valor de d_2 é dado por:

$$d_2 = -l \lambda \frac{\Delta t_0 + \Delta t_1}{2} + \alpha h_2 ,$$

sendo:

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{l}{h} \left(\Delta t_1 - \Delta t_0\right) \lambda .$$

Nas estruturas de betão, o efeito da retracção estuda-se precisamente do mesmo modo que o efeito da variação de temperatura.

Nas peças de betão armado livremente dilatáveis a retracção dá origem só por si a tensões, e além disso origina também, a par de variações de comprimento, variações de curvatura da linha média a não ser que as peças (incluidas as armaduras) tenham um eixo de simetria. Portanto nas estruturas de betão armado exteriormente hiperestáticas e interiores isostáticas, a retracção dá origem a tensões locais que se devem adicionar às tensões que ela provoca em virtude da mudança de forma e dimensões das peças constituintes; estas tensões calculam-se como as devidas a variações de temperatura.

(Conclui no próximo número)

A «TÉCNICA» tem a honra de inserir nas suas páginas as duas notáveis conferências realizadas no Instituto Superior Técnico por S. Ex.ª o Engenheiro de Caminos, Canales e Puertos de Espanha Don César Villalba Granda.
É grande a nossa satisfação em podermos contribuir assim, mais uma vez, para a intensificação, tão necessária, do intercâmbio científico e técnico Luso-Espanhol. A eficácia dêsse intercâmbio só será assegurada mediante a colaboração decidida de personalidades ilustres como a de S. Ex.ª o Engenheiro Don César Villalba Granda, uma das mais notáveis figuras da engenharia espanhola.
A «Técnica» agradece, em nome da engenharia portuguesa, a preciosa contribuïção de S. Ex.ª para o vasto e fecundo empreendimento que é a aproximação das duas nações irmãs.

1.ª CONFERÊNCIA

LOS PUENTES MODERNAS EN ESPAÑA

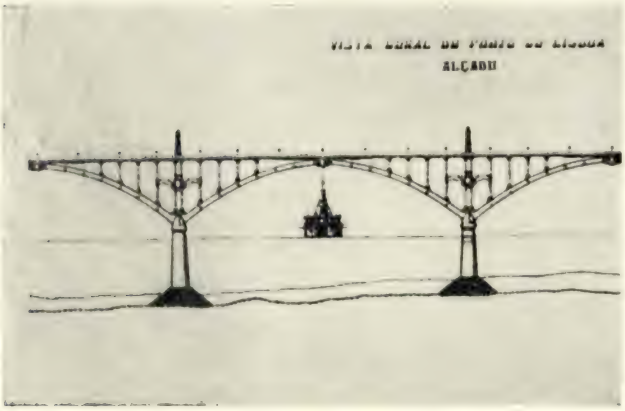
1 — Preliminares:

Sean mis primeras palabras para expresar mi agradecimiento a cuantas elevadas personalidades y estimados colegas portugueses han prestado estímulo y aliento a estas conferencias, en las que voy a tener el honor de exponer algunos trabajos realizados últimamente en mi país, contribuyendo así con mi modesta aportación al mejor conocimiento entre las dos naciones hermanas y a un intercambio en el campo de la ingeniería, que ardientemente deseamos sea fructífero.

Traigo el cordial saludo de mi Ministro Excmo. Sr. Don Alfonso Peña Boeuf, cuya eminente personalidad si es bien conocida en el campo mundial de la técnica, lo es de modo especial en Portugal. Efectivamente, sabido es que el Ministro de Obras Públicas español es uno de los miembros más antiguos de la Asociación Luso-Española para el progreso de las Ciencias que hace más de 22 años inauguró sus tareas en Oporto, presentando ya en aquella ocasión una interesantísima Memoria de su magno proyecto del puente de Lisboa. Sus libros, especialmente la «Mecânica Elastica», son de especial aprecio en Portugal.

Y puesto que el tema de estas conferencias se refiere precisamente a puentes, no podemos dejar de recordar en esta ocasión el famoso y notable proyecto de puente de Lisboa sobre el río Tajo, en el que Don Alfonso Peña desarrolló un trabajo colosal: baste con decir que se trata de 14 vanos de 153 m. de luz cada uno, entre ejes de pilas, que, contando los estribos, dá una longitud total de 2.232 m. Los arcos eran de 150 m. de luz entre ejes de directriz y 30 m. de

flecha, con arranques de 10 m. sobre la pleamar (Foto 1). Al llegar a la margen de



Fot. 1. Puente de Lisboa — Proyecto

Lisboa, la rasante del puente estaba a 35 metros sobre el muelle, lo que exigía importantes rampas o viaductos de avenidas, que hacían el enlace, resolviendo el problema de modo artístico y eficaz.

Merece citarse en este puente el original procedimiento de cimentación que resolvia un importante problema constructivo, ya que el río alcanza sondas hasta de 40 metros y los fondos son de lodos con capas de gran espesor. Este procedimiento fué empleado más tarde, con gran éxito, en el puente de La Rochelle, entre otros, y su originalidad como del Ingeniero Sr. Peña está reconocida y descrito detalladamente el sistema en el libro de Rousselet de estabilidad de infraestructuras.

2 — La construcción de grandes puentes y de moderna estructura en España.

A pesar de que la reconstrucción de puentes en España ha sido una ingente labor, dificultada por escasez de materiales, y teniendo que atender a otros muchos urgentes trabajos de reconstrucción que no son precisamente puentes, no se ha limitado nuestra técnica a una mera reconstrucción de los puentes derruídos, sino que se ha procurado adoptar modernos tipos de estructura y elegir cuidadosamente los materiales, de acuerdo con las circunstancias presentes.

El número de destrucciones en la red de caminos del Estado fué de 2.651, de los cuales 679 eran puentes, ya hoy casi todos reconstruídos, y en ferrocarriles, solamente las líneas de M. Z. A. sufrieron la voladura de 27 grandes puentes. Y, por si ello fuese poco, se ha simultaneado esta labor con la construcción de otros muchos de nueva ejecución entre los que destacaremos el acueducto de Tardienta, el Puente del Pedrido, y el Viaducto del Esla, hoy el arco de hormigón segundo del mundo, así como otras que vamos a dar a conocer someramente en esta conferencia.

3 — Tendencias que se han seguido en la construcción actual.

A consecuencia de la situación presente, que a todos los países afecta, y de la guerra pasada en mi país, la disponibilidad de materiales ha sufrido una honda transformación, por carencia y por carestia; al aumento de la mano de obra en sutriple sentido de incremento de jornal, abastecimiento de los obreros, y rendimiento, se unen las dificultades de transporte, y todo ello dá como resultante una variación profunda en los conceptos de las masas y de las estructuras, que se refleja en las decisiones del técnico al proyectar sus obras.

Por ello la tendencia que en la construcción actual se ha seguido en España, tanto en los trabajos de reconstrucción de puentes, como en los de nueva realización, ha sido, desde luego, el empleo lo más restringido posible de los materiales metálicos, e incluso su supresión absoluta, cuando las condiciones de la obra lo han permitido, empleando el hormigón em masa. Si la distancia de las zonas de obtención de áridos, su mala calidad, o el aprovechamiento de cimentaciones de puentes con el alzado destruído cuando aquéllas no permitían gran peso en la superestructuras, han impuesto la construcción de tramos metálicos, como he realizado en el puente de Tortosa, sobre el Ebro, que más adelante describimos, se han estudiado estructuras de gran ligereza, acusada aún más, en este caso, por el empleo de la soldadura al arco eléctrico. Asi en este

puente, de 667,6 tns. que pesaba el anterior, se pasó a 457,2, no obstante estar calculado aquél para menores sobrecargas y tener menos anchura. La economía de acero respecto a otro puente de igual estructuras, pero roblonado, fué de un 26 %.

Por ello, el empleo de la soldadura, lo hemos seguido adoptando, a partir de este de Tortosa, en numerosas obras, aún en elementos auxiliares, como las cimbras, siendo al efecto dignos de mencionarse los casos del puente del Pedrido donde he efectuado el montaje sin andamios de una cercha de 75 metros de luz, en un arco atirantado a 34 metros de altura sobre la ría de Betanzos y la del Viaducto del Esla, para el f. c. Zamora-Coruña, cuya autocimbra forma un arco de 175 metros de luz, que creemos es la estructura soldada de mayor luz del mundo. Además de la economía de peso que oscila entre el 20 y el 28 % de igual estructura roblonada, lo que ha permitido en el Esla, realizar una autocimbra sumamente ligera hasta el punto de pesar solamente 500 kg por metro lineal, permite obtener en estructuras que han de ser luego hormigonadas, elementos poco compactos, más fáciles de hormigonar y con el mínimo de planos de deslizamiento posibles dentro del hormigón. Con el mismo criterio de máxima ligereza y economía de material se ha empezado a construir en España un interesante tipo de estructura, preconizado por el Ingeniero Harel de la Noé, adoptada en el puente del Tordera (Barcelona) por nuestro compañero Don Eduardo Torroja, y en el del Guadalquivir en Posadas (Córdoba). Se trata de estructuras mixtas en bow-string de piso superior en que el elemento de compresión, cordón superior se realiza con hormigón vibrado y los elementos de tracción, diagonales y cordón inferior, con ligeros perfiles sin recubrir de hormigón, que además se unen y forman con elementos soldados. Se obtiene así una estructura sumamente ligera, con el materiale preciso, tanto de hormigón como metálico, y en que cada elemento trabaja a su solicitación más adecuada, compresión en el hormigón y tracción simple en las piezas metálicas.

En los puentes de hormigón armado, comenzamos también a utilizar el tensado previo, para reducir al mínimo el volumen de material, aprovechando íntegro el trabajo, debiendo citar al efecto que ya en los arcos atirantados del puente del Guadalquivir en Brenes (Sevilla) utilicé en España, antes que se comemzase a emplear este sistema que tanto impulso está adquiriendo en la actualidad y cuyas primeras tentativas se basan en las experiências de Lund y Koemen en 1907.

Siguiendo el criterio de máxima economía en los materiales, especialmente en aquellos que son de más difícil y costosa adquisición, se ha procurado utilizar arcos en todos los casos en que la naturaleza de la cimentación lo ha permitido, pues la dificultad de altura de rasante las salvamos mediante el empleo de arcos de tablero intermedio (ejemplo el puente que construyo actualmente en el Duero, en Peñafiel, tres arcos de 40 metros con junta de dilatación en el tablero y disposición central en voladizo para evitar la antiestética distribución de montantes) que, si bien requieren armadura, es en menos cuantía que cualquier sistema de tramos rectos de igual luz. En cambio el arco atirantado sólo se emplea en caso indispensable pues el tirante supone gran cantidad de hierro.

Si la altura de rasante lo permite, el empleo de arcos de escasa o ninguna armadura es indicado.

Como, por exiguo que sea el rebajamiento, los efectos de retracción, higroscopicidad y deformación plástica, adquieren uma cuantía que obligaría casi siempre a emplear armaduras para contrarrestar estos efectos, hemos utilizado el método de Freyssinet, que por primeira vez empléé en España en el puente del río Guadalhorce en Pizarra (Málaga), en un arco de 50 metros, de bóvedas gemelas, con poco peso, que requirió asi una cimbra muy ligera, obteniendo un arco si armadura alguna y cuya silueta por sus dimensiones, se asemeja a un arco de hormigón armado. La curva directriz de este arco es una parábola de 4.° grado, curva que hemos empleado mucho en los arcos, entre otros en el del Viaducto del Esla, ya que, escogiendo

convenientemente el parámetro, se pueden obtener arcos con poca armadura aún sin utilizar procedimientos especiales, si el rebajamiento es pequeño. Así en los 13 arcos de acceso que he construído en el puente del Pedrido, en la ría de Betanzos--Ferrol, de 32 metros de luz, rebajados a 1/2, formados por bóvedas gemelas de 1,20 metros de ancho y 0,60 metros de espesor en clave, solamente han hecho falta armaduras en la zona de clave, 10 ø de 30 m/m por plano y bóveda. Como antes dijimos, si han de salvarse las dificultades de materiales y transportes, también han de tenerse en cuenta las de jornales y manutención de los obreros al pie de obra. Por ello ni en los numerosos trabajos de reconstrucción, ni en los de nueva planta, se ha empleado la sillería, multiplicando, en cambio, todo lo posible el hormigón en masa, ya que éste, salvo el cemente, requiere materiales que suelen encontrarse abundantemente al pie de obra, tratándose de puentes, o a escasa distancia, obteniéndolos con pequeña o escasa manipulación, prefiriendo incluso, si los áridos no están a su tamaño adecuado, la preparación mecánica, como en los puentes del Tajo en Estremera, Jallas en Coruña y especialmente en las importantes instalaciones del Viaducto del Esla, para la obtención de los 28000 metros cúbicos de grava y 16000 de arena necesarios para la fabricación de 32000 metros cúbicos de hormigón que precisó el Viaducto.

Desde el año 1866 en que se comenzaron a emplear en España las bóvedas de hormigón en masa (puentes de los ríos Lavalé e Iregua, bóvedas escarzanas de 10 metros de luz), sus excelentes resultados generalizaron su empleo. Y, actualmente, al suprimir en gran parte obreros especializados, al permitir la intensificación de los trabajos, reduciendo los peligros de la ruina de cimbras por las crecidas y por la obtención de economías que frecuentemente exceden del 50 por 100, han desplazado totalmente las obras de sillería.

Desde el punto de vista constructivo, sabido es que se pueden obtener hormigones que resistan tanto como los mejores sillares y aumentando la dosificación en aquellas zonas de bóvedas en que se produzan mayores presiones se puede adaptar la calidad del material en cada zona a su carga, lo que es difícil de obtener con la piedra. Como las bóvedas de hormigón son de trasdós contínuo, no necesitan contrarroscas y por último pesan menos que las de piedra por lo cual las cimbras son menos costosas y sus empujes son menores, exigiendo menos apoyos y cimientos.

La rapidez de la construcción de puentes de hormigón respecto a — los de sillería ha sido uno de los factores predominantes para la ellección de aquelles en las obras de reconstrucción, muy especialmente en las de ferrocarril, donde la urgencia en la construcción era imperiosa.

Citamos a continuación, escogidas al azar en las diversas líneas algunos casos de reconstrucción de puentes de f. c. en los que el empleo del hormigón ha permitido realizar rápidamente los trabajos:

Línea de Castejón a Bilbao: — Viaducto de la Reina: Arcos de 15 m. a 25 m. de altura = Reconstruído en 30 días.

Línea de Venta de Baños a Santander: — Puente de las Fraguas: 4 arcos de 14 metros = Construído en 21 dias.

Línea de Jaca a Canfranc: — Puente del Cinca: Destruídos 2 arcos de 27,50 m. = Reconstruído en 23 días.

Central de Aragón: — Poente del Barranco Mora· 3 arcos de 8 metros a 12 de altura = Destruído totalmente, reconstruído en 13 días.

Central de Aragón: — Viaducto de Albentosa: 10 arcos de 10 m. y 2 centrales de 20 metros 45 de altura: Volada la pila central y los dos arcos de 20 m. = Se dió paso a los 24 días.

Línea Madrid-Barcelona: — Viaducto de Los Masos: 14 arcos de 12 metros a 37,15 metros de altura: Volada la pila central y los arcos de 20 metros — Reconstruído en 45 días.

Línea de Vascongados: — Viaducto de Orio: 7 arcos de 10 metros a 17,50 metros de altura media: Completamente reconstruído en 56 dias.

Todas estas y otras muchas obras análogas han sido realizadas en hormigón en masa, aun cuando el resto de las fábricas que se conservaban no lo fuesen.

El coste de la ejecución de las bóvedas, ha hecho abandonar ésta construcción aun en el caso en que así estaban proyetadas: Tal ocurre con el puente de Ledesma, en Salamanca. Se trata de un arco de sillería con 50 metros de luz cuyo el coste el año 35 ascendía (solamente el arco, tímpanos, tableros y pilas-estribos) a 569.000 pts. y revisados los precios el año 41 el presupuesto se elevaba (de las mismas partes de obra) a 1.138.000 pts., en cambio el puente del Guadalhorce en Málaga con arco de hormigón en masa y de igual luz que el anterior costó el año 1929 184.011,67 pts , con los coeficientes de aumento su coste sería hoy de unas 450.000 pesetas.

Unicamente, y como caso excepcional, cuando la obra volada ha sido una parte de algún puente de sillería de especial mérito y histórico o artístico, se ha reconstruído con este material sin reparar en coste ni en tiempo, es el caso del llamado puente Largo de Aranjuez, sobre el Jarama.

Tal es el criterio seguido en España en la reconstrucción de puentes y para los de nueva planta.

4 — Clasificación expositiva de las grandes obras:

En esta descripción de los grandes puentes españoles vamos a elegir para cada tipo de obra un puente de las correspondientes características, casi todos construídos, como tantos otros de importancia, después de la Guerra de Liberación, bajo la Superior Dirección del Ministerio de Obras Públicas Don Alfonso Peña, y citando solamente puentes construídas y proyectadas por mi, salvo el Acueducto de Tardienta, del Sr. Peña por serme, naturalmente, más conocidas per incidencias.

La clasificación y el tipo de puente escogido, es la siguiente:

A — Puentes metálicos			Puente del Ebro, en Tortosa (Tarragona)
B — Puentes mixtos			Puente del Guadalquivir, en Posadas (Córdoba)
C — Puentes de hormigón	I — En masa		Puente del Guadalhorce, en Pizarra (Málaga)
	II — Poco armado		Puente del Pedrido, en Betanzos (Coruña), arcos laterales
	III — Armado	*a*) vigas contínuas articuladas	Puente del Besós (Barcelona)
		b) vigas rectas	Puente del Guadiana, Lobón (Badajoz)
		c) vigas Vierendeel	Puente de Caldas (Barcelona)
		d) arcos atirantados	Puente del Guadalquivir, en Brenes (Sevilla)
		e) arcos de piso superior	Puente del Tajo, en Alarca (Cáceres)
		f) arcos de piso intermedio	Puente del Duero, en Peñafiel.

Al presentar un tipo de puente para cada característica estructural, el número de éstos nos obliga a una descripción muy somera de cada uno de los citados y únicamente, por su importancia daremos después, y como final de esta conferencia una descripción más detallada de tres grandes obras, el acueducto de Tardienta, el puente de Betanzos, en el Pedrido (Coruña), para carretera y especialmente el Viaducto del Esla para el f. c. Zamora-Coruña, estos dos últimos inaugurados por nuestro Caudillo Franco en su reciente triunfal viaje por el N. O. de España.

Describamos brevemente los antes consignados:

A — *Puentes metalicos:*

Puente del Ebro, en Tortosa (Foto 2): Es el primer puente construído enteramente con soldadura eléctrica en España. Son tres

Fot. 2. Puente de Tortosa — Enteramente construido con soldadura eléctrica

tramos metálicos en arco de 49,09 metros de luz, com tirante — viga de rigidez, sistema Langer, con sección de arco en cajón y arriostramientos superiores en K.

El tirante-viga de rigidez es una doble T de alma llena, de 1,66 metros de altura, formada con elementos soldados. Las péndolas, 10 por cuchillo, se forman con redondos de 72 m/m con manguitos roscados para obtener la tensión necesaria.

El tablero es un entramado corriente de viguetas y largueros cubriendo los recuadros con losas de hormigón armado de 17 m/m de grueso.

El peso del acero laminado empleado en un arco es de 38,753 tn.; en las vigas de rigidez de un tramo 59,223 tons. y el total por tramo 152,405 tons.

Tanto en la adopción del tipo de estructura como en la ejecución de ésta se ha tenido muy en cuenta la eliminación de esfuerzos secundarios, una de las causas de los fracasos que en Bélgica han tenido algunos puentes soldados del Canal Alberto.

El montaje se ha realizado sin andamios, ya que éstos hubiesansido de considerable cuantía por alcanzarse profundidades de agua hasta de 15 metros, siendo bruscas e impetuosas las crecidas y debiendo trabajar en toda época, sim interrupción, dada la urgencia de la obra.

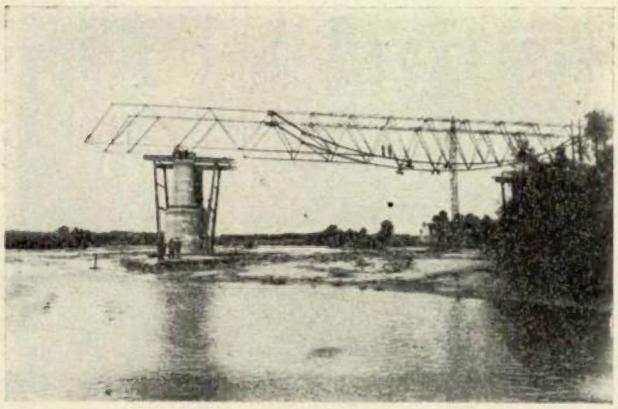
Dicho montaje fué interesante, realizándose mediante lanzamiento de las vigas de rigidez, provistas de un pescante de 8 metros para el lanzamiento del primer vano, agregando una torre auxiliar con regulación de cables mediante gatos en su coronación, para el resto, cortando luego y bajando a su sitio las vigas y contrapeando la última, al quedar como viga de un solo vano antes de colocar el arco. Se efectuó así la difícil maniobra del lanzamiento de viga de 1,66 m de altura salvando vanos de 55 metros, llegando a alcanzar flechas de 39 centímetros (Foto 3)

Fot. 3. Puente de Tortosa — Montaje — Lansamiento de las vigas de rigidez — Vigas de 1,66 m. de altura, salvando luces de 55 m.

B — *Puentes mixtos:*

Es un ejemplo de estos puentes el actualmente en construcción en el Tordera (Barcelona) y el de Posadas, en el río Guadalquivir, (Córdoba). Este se compone de cinco tramos de piso superior formados por vigas parabólicas de triangulación metálica, en las que se aprovecha la misma estructura de hormigón vibrado del tablero como cabeza de compresión del conjunto. La luz de los tramos es de 43 metros y su montaje por lanzamiento con estructura adosada auxiliar y descenso a su posición com gatos y marcos auxiliares de suspención. El peso de cada tramo, incluso pavimento es solamente de 5.365 kgs./m. l., con 6,50 m. de anchura.

Como antes hemos dicho este tipo de estructuras se empieza a — emplear por primera vez y es muy racional, —, dando tramos de gran ligereza, en que cada material trabaja a su solicitación óptima: hormigón a compresión, hierro, sin revestir, a tracción (Foto 4 e 5).

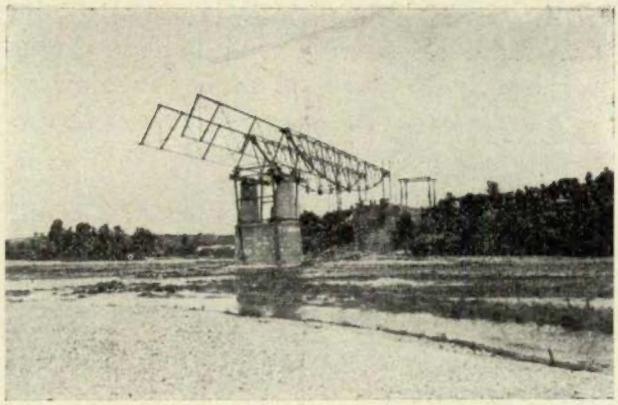


Fot. 4. Puentes mixtos — Montaje de las vigas P.te del Tordera

C — *Puentes de hormigón:*

I — *En masa:* El puente sobre el río Guadalhorce en Pizarra (Málaga) es el primero en el que se emplearon en España los gatos hidráulicos para descimbramiento y corrección.

El vano principal, de 50 m, se salva con un arco cuya fibra media es una parábola

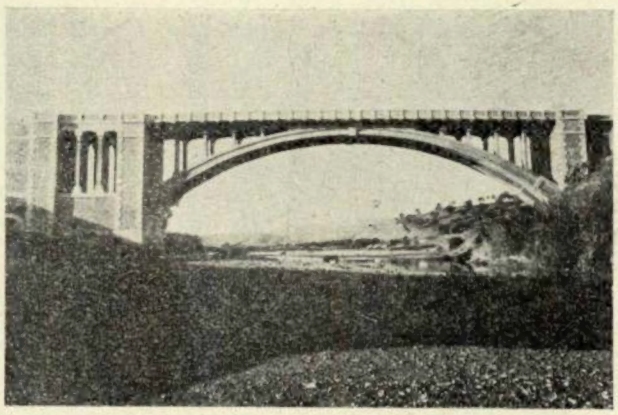


Fot. 5 Puentes mixtos — Otra fase del montaje P.te del Tordera

de 4.° grado, con 6,75 m de flecha, y está constituído por dos bóvedas gemelas sin ninguna armadura de 1,50 metros de ancho constante cada una, el espesor en clave es de 1,25 m y 1, 5 en arranques. El arco, hormigonado sobre una ligem cimbra de madera, fué construído por dovelas, y cerradas éstas, se abrió por clave mediante la actuación de ocho gatos hidráulicos de 300 tns., capacele 600 tns. e probados incluso instalación de bombas y tuberías a 700 atmósferas (Foto 6).

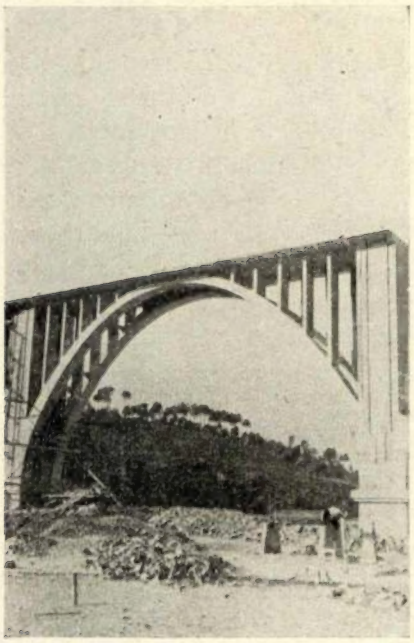
Arcos de Hormigón

II — *Poco armado:* Los trece arcos laterales del puente del Pedrido en la ría de Betanzos (Coruña) son de piso superior, de 32 metros de luz, rebajados a 1/2. La elección cuidadosa de la directriz, parábola



Fot. 6. Puente del Guadalhorce — Arco de hormigón en masa, de 50 m.

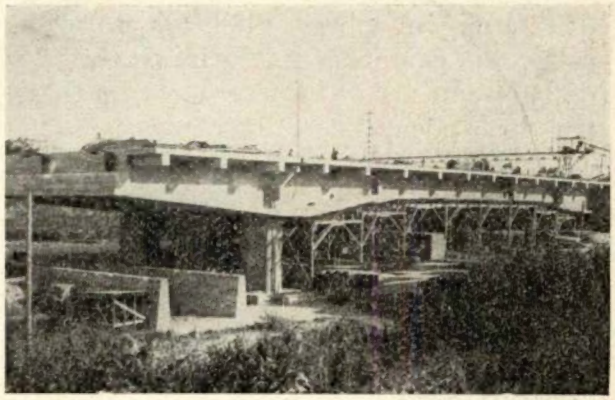
de 4.° grado, ha permitido prescindir de la armadura, salvo en la zona de clave donde precisaron 10 ø de 30 m/m por plano y bóveda. Los arcos son de bóvedas gemelas de 1,20 m de ancho constante y 0,60 m de espesor en la clave. Un detenido estudio de los tímpanos, como pórticos múltiples, ha permitido una gran esbeltez y ligereza, siendo los montantes más elevados de 12 m con 0,25 metros de espesor. Los detalles de cimentación y otros de esta obra los indicaremos más adelante, al dedicar una descripción especial a este puente (Foto 7).



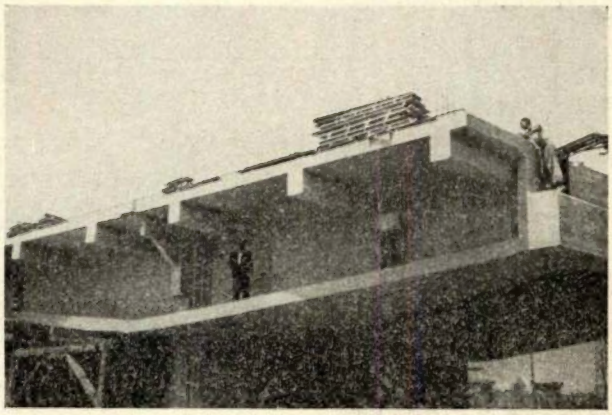
Fot. 7. Puente del Pedrido — Arcos de hormigón poco armado. Luz de 32 m.

III — *Puentes de hormigón armado*:

a) *Vigas contínuas articuladas*: Citamos, como aplicación de este caso, el puente sobre el río Besós en Barcelona. Tratándose de una obra de difícil cimentación, gran anchura y rasante baja, se construyen vigas cantilever contrapesadas de gran luz. Se compone de dos tramos laterales de 60 m de los cuales corresponden 10 a contrapeso, 40 a luz libre entre pilas y los otro 10 a ménsula, apoyándose en éstas el tramo central de 25 metros. Es pues uno de los puentes, en su sistema, mayores de Europa. Las pilas son dos fijas y dos pendulares. La estructura transversal se compone de tres vigas de sección alveolar, con cabeza inferior ensanchada, habiéndose seguido el criterio de obtener peso mínimo y poca altura. El ancho de calzada es de 12 metros y el total 18 m (Fotos 8 e 9).



Fot. 8. Puente del Besós — Vigas Gerber contrapesadas. Tramo de 60 m. (10 + 40 + 10)

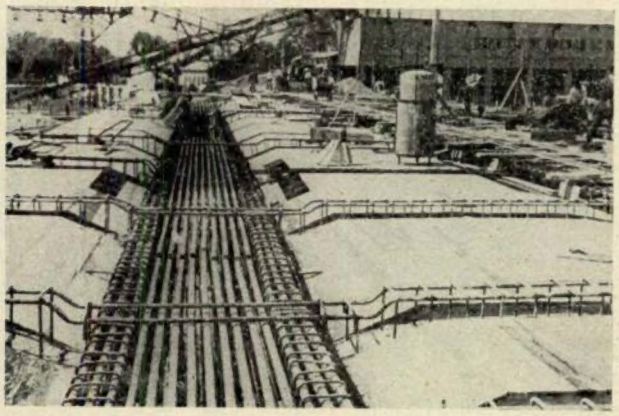


Fot. 9. Puente del Besós — Extremo en voladizo para el tramo central

La cimentación, realizada con cámaras de hormigón armado, por el sistema de aire comprimido, ha presentado grandes dificultades por encontrar capas de fango de más de 6 metros de espesor. La máxima profundidad alcanzada ha sido de 24 metros.

Las circunstancias antes mencionadas han obligado a adoptar este tipo de estructura, que, dada la luz y poca altura requiere

armaduras muy compactas que además hacen sumamente complicado el hormigonado (Foto 10).



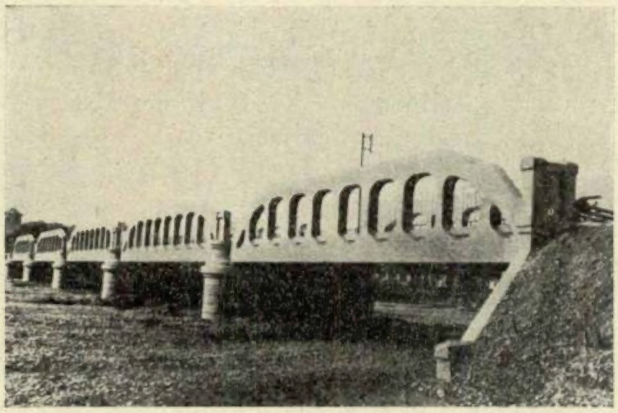
Fot. 10. Puente del Besós — Armaduras de la zona superior de las vigas

b) *Vigas rectas*: Solamente decimos que en solución de vigas rectas isostáticas, de alma llena, las mayores luces construídas son las de los tramos del puente sobre el río Guadiana en Lobón (Badajoz), 14 vigas de 27 metros sobre palizadas de hormigón que con tres arcos de hormigón armado de 53 m rebajados a 1/10, constituye el puente de mayor longitud de España, 583 metros.

c) *Vigas Vierendeel:* No han tenido casi aplicación en España. Son interesantes las del puente de la Riera de Caldas (Barcelona) porque han sido estudiadas de tal modo que ni la cantidad de hierro ni la de hormigón sean superiores a las vigas rectas apoyadas de alma llena y piso superior de igual luz, por lo cual pueden solucionar el problema en algunos casos, especialmente en los pasos de ferrocarriles, en que se dispone de poca altura de rasante, sin gravar el coste respecto a una solución corriente de vigas rectas.

Son cinco tramos de 20 metros de luz, com 2,50 m de altura de vigas y 0,60 m de espesor. La altura del piso al canto inferior de las vigas es solamente de 0.65 metros. (Foto 11).

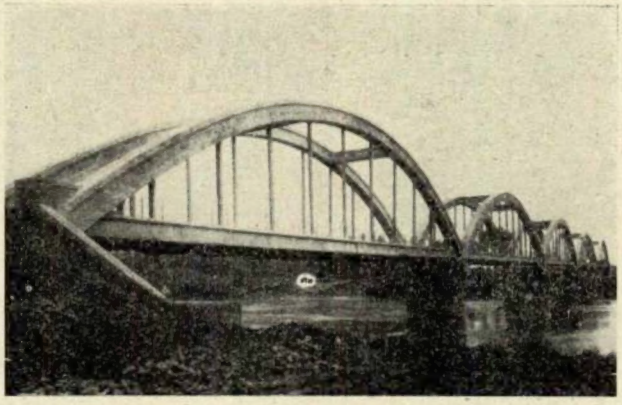
d) *Arcos atirantados:* Poco empleados en España, el más importante es el tramo central de la ría de Betanzos, que luego describimos más ampliamente. El del Guadalquivir en Brenes es interesante porque su disposición puede considerarse, como ya



Fot. 11. Puente de la riera de Caldas — Vigas Vierendeel, poco armadas. Luz 20 m.

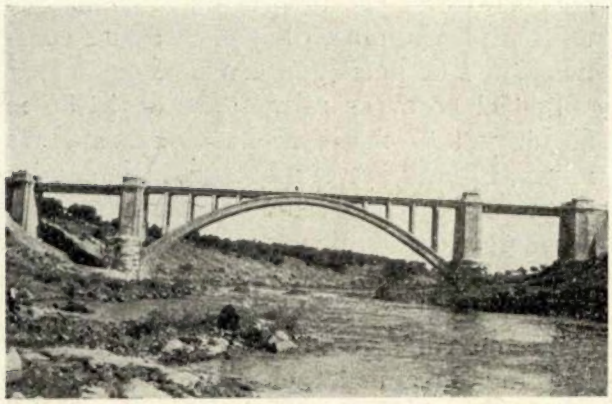
hemos dicho, precursora del sistema de tensión previa, tan en boga hoy en las construcciones de hormigón armado.

Son cinco arcos atirantados de 51,30 m de luz y 9,33 m de flecha, con armadura mixta, rígida para el montaje sin andamios y complemento en redondos tensables. Por actuación en los manguitos del tirante se efectúa la regulación de tensiones. Los arcos se apoyan en las pilas y estribos en coronaciones en voladizo que permiten reducir la longitud de aquelles elementos de 7,20 m, a 4,10 m, con la consiguiente economía en alzados y cimentanciones. (Foto 12)



Fot. 12. Puente del Guadalquivir, en Brenes — 5 arcos atirantados, de 51,30 m., con armaduras a tensión previa

e) *Arcos de piso superior:* Son naturalmente numerosos los puentes de este tipo, los de mayor luz son el de San Roman de Candamo, de 72 m. de luz (destruído en la guerra), el viaducto de Teruel, con un arco de 79 metros, rebajado a 1/3; el de Alarza en el Tajo, de 70 metros rebajado a 1/4 y muy especialmente el viaducto del Esla con 210 metros, al que luego dedicamos descripción más detallada. El de Alarza fué en su día el mayor de bóvedas gemelas construído en España. El espesor del arco en clave es de 1,20 m. y se construyó mediante una cimbra apoyada en dos castilletes fuertemente defendidos contra los ímpetuosas avenidas del Tajo, la deformación en cimbra fué solamente de 1cm., cifra excepcional y acaso única por lo escasa, en bóvedas de luz y rebajamiento análogo. La obra se construyó en menos de un año. (Foto 13)



Fot. 13. Puente sobre el río Tajo, en Alarza — Arco en bóvedas gemelas, de 70 m. Hormigón poco armado

f) *Arcos de piso intermedio:* Poco empleados hasta la fecha en España, tienen, no obstante la ventaja de disponer del rebajamiento del arco con independencia de la altura de rasante. Por eso principalmente lo hemos utilizado en el puente sobre en río Duero en Peñafiel (Valladolid). Se trata de tres arcos de 40 m. de luz rebajados a 1/4, de hormigón con armadura mixta, rígida de montaje y suplementaria de redondos.

El enlace del tablero se efectúa mediante pórticos invertidos, que dá más armonía dimensional al conjunto que las péndolas. La distancia entre éstos, en una misma bóveda, es constante, a pesar de llevar el tablero la junta de dilatación en el plano vertical de clave, para lo cual se dispone la zona entre las dos péndolas respectivas en voladizo, evitándose así la doble péndola central, tan antiestética.

Resumen especial de tres grandes obras:

Terminado este rápido resumen de algunas obras modernas características, vamos a describir para concluir, tres últimos trabajos: Un acueducto, el de Tardienta, un puente para carretera, el puente del Pedrido y otro para f. c. el Viaducto del Esla, con especial mención de este último.

Acueducto de Tardienta:

Entre las obras especiales recientemente terminadas en España, merece destacada mención el acueducto de Tardienta, interesantísima obra original, proyectada por nuestro Ilustre Ministro de Obras Públicas. Las características de la obra, 887 metros de longitud y 71 m^3/seg. de caudal, hace que sea una de las de más envergadura emprendidas últimamente en España. Fué inaugurado el 26 de Junio de 1941.

Consta la estructura de 5 tramos contínuos de 5 vanos y de tres vanos de 15 m. de luz, apoyados sobre pilas de hormigón armado de 2 m. de anchura, por intermedio de planchas de plomo. Características interesantes de la estructura son: Cuantías medias m^2 de encofrado por m^3 de hormigón 4,15 y de hormigón por metro lineal de acueducto 6,75 m^3.

Cajero	91,5 kg/m^3
Pilas	85,5 kg/m^3
Total	75,5 kg/m^3

La originalidad de la estructura y las discusiones a que estuvo sometida, llevaron hasta a realizar un tramo de pruebas, de 75 m. de longitud, en el que se realizaron interesantísimos estudios con auscultadores de lámina vibrante y de deformación transversal, especialmente. La discusión princi-